FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

DIXIÈME SÉRIE — TOME XII

N° 1

1909

PARIS

AU SIEGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

1909

Surfaces applicables et Courbure géodésique

par L. LEAU

19.7.1867.Mai 29

La détermination des points d'inflexion de la transformée par développement d'une ligne tracée sur une surface développable résulte de l'invariance de la courbure géodésique dans une telle déformation. Voilà, semble-t-il, de quoi donner un certain intérêt à une démonstration élémentaire de ce théorème ; il s'étend, comme on le sait, à deux surfaces applicables quelconques et je me propose de l'établir dans toute sa généralité par des considérations tirées des infiniments petits des différents ordres.

Rappelons d'abord une définition : on appelle courbure géodésique, en un point, d'une ligne tracée sur une surface, le produit de sa courbure en ce point par le sinus de l'angle que forment le plan osculateur à la courbe et le plan normal à la surface suivent la même tangente ; l'inverse de ce produit est le rayon de courbure géodésique.

Théorème

Si, sur deux surfaces applicables l'une sur l'autre, on trace deux lignes correspondantes, leurs rayons de courbure géodésique en deux points homologues sont égaux.

Pour démontrer ce théorème, qui fait l'objet de la présente note, je m'appuierai sur le lemme que voici :

Etant donnés une surface S et, en un de ses points ordinaires M, le plan tangent P, le rayon de courbure géodésique, en ce point, d'une courbe C qui y passe et qui est située sur la surface est égal au rayon de courbure au même point de sa projection c sur le plan tangent.

Ce fait est une conséquence immédiate du théorème de Meusnier appliqué au cylindre projetant orthogonalement la courbe considérée. Il est d'ailleurs aisé de l'établir directement.

Soient : M T la tangente à C en M, N un point de C voisin de M, n sa projection sur P, N H et n H les perpendiculaires menées de N et de n sur la tangente, enfin Q le plan N M T.

Le rayon de courbure de c en M est, pour N tendant vers M,

Sur un problème combinatoire

par L. LEAU

Etant donnée une succession linéaire de n lettres

$$u, u_2, \ldots\ldots u_n \quad ,$$

cette expression peut acquérir d'elle-même un sens déterminé lorsque l'on attribue à ses éléments certaines significations. Ainsi, dans le cas de deux lettres, si la première représente « sinus » et la seconde « 45° », dans le cas de trois, si la première et la dernière désignent des nombres quelconques et la seconde « plus », « moins », « multiplié par » ou « divisé par », ou « égal à ». Une telle formule sera dite binaire, ternaire, quaternaire... selon qu'elle contiendra deux, trois, quatre..... éléments.

Mais l'expression considérée peut aussi ne recevoir un sens déterminé qu'après que certains éléments consécutifs ont été préalablement groupés, de sorte que ces groupes ne jouent plus que le rôle d'éléments simples. Par exemple, dans le cas de cinq lettres, la notation $3 + 4 \times 7$ acquiert un sens précis lorsque l'on imagine remplacé par sa valeur le groupement soit des trois premiers signes, soit des trois derniers. On obtient ainsi des formules complexes dont quelques-uns des éléments sont des expressions qui peuvent être complexes elles-mêmes. La logique et l'analyse en fournissent d'innombrables exemples.

Quel est donc le nombre total des formules théoriquement possibles avec une suite de n lettres ? Tel est le problème combinatoire qui se pose naturellement et que signale M. Peano dans son « Introduction au Formulaire de Mathématique (1) », page 12. Après avoir rappelé la solution donnée par Lucas dans le cas de combinaisons binaires seulement, l'éminent professeur de l'Université de Turin indique que l'on ne connaît pas encore de solution dans le cas général. A sa connaissance et à la mienne, la question n'ayant pas été traitée depuis lors, je me propose de la résoudre ici.

Appelons a_n le nombre des formules que l'on peut obtenir avec n éléments et posons

(1) Publié par la « Rivista di Matematica », Turin, 1894.

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$$

On voit de suite que $a_1 = a_2 = 1$

La dernière combinaison effectuée sur la suite $u_1 u_2 \ldots\ldots u_n$ pourra par exemple être ternaire et déterminée par deux points (qui remplaceront avantageusement les parenthèses plus usuelles), placés, je suppose, l'un après u_p l'autre après u_q :

$$u_1 \; u_2 \ldots\ldots u_p \,.\, u_{p+1} \ldots\ldots u_q \,.\, u_{q+1} \ldots\ldots u_n$$

Or le nombre des formules ainsi obtenues est évidemment $a_p\, a_{p-q}\; a_{n-q}$ de sorte que le nombre de toutes les expressions à dernière combinaison ternaire est le coefficient de x^n dans y^3 ; et par suite, dans $y^2 + y^3 + \ldots\ldots$
le coefficient d' x^n n'est autre chose que a_n . Donc on a :

$$y = x + y^2 + y^3 + \ldots\ldots \qquad \text{ou}$$

$$2\,y^2 - (1+x)\,y + x = 0 \qquad \text{ou encore}$$

$$y = \frac{x+1}{4} - \frac{x^2 - 6x + 1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 1}}$$

Comme le coefficient d' x^n dans le développement de

$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 1}}$ est la valeur prise par le n^{me} polynôme de Legendre $X_n(t)$ pour $t = 3$, on en conclut que (pour $n > 1$)

$$(1) \qquad a_n = -\frac{1}{4}\left[X_{n-2}(3) - 6\, X_{n-1}(3) + X_n(3) \right]$$

D'ailleurs

$$n\, X_n(t) - (2n-1)\, t\, X_{n-1}(t) + (n-1)\, X_{n-2}(t) = 0$$

d'où

$$(2) \qquad a_n = \frac{3\, X_{n-1}(3) - X_{n-2}(3)}{4\, n}$$

Comme

$$(1-t^2)\,\frac{d\, X_{n-1}}{d\, t} = (n-1)\left[X_{n-2} - t\, X_{n-1} \right]$$

relation qui devient pour $t = 3$

$$-8\left(\frac{d\,X_{n-1}}{d\,t}\right)_{t=3} = (n-1)\left[X_{n-2}(3) - 3X_{n-1}(3)\right]$$

il vient

$$a_n = \frac{2}{n(n-1)}\left\{\frac{d\,X_{n-1}(t)}{d\,t}\right\}_{t=3} \tag{3}$$

ou, en se souvenant que

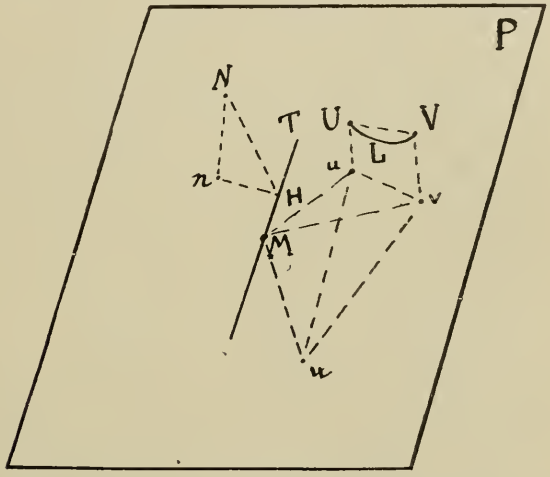
$$X_{n-1}(t) = \frac{2}{2^{n-2}(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{d\,t^{n-1}}(t^2-1)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{2^{n-2}\,n!\,(n-1)}\left[\frac{d^n}{d\,t^n}(t^2-1)^{n-1}\right]_{t=3} \tag{4}$$

Les formules (3) et (4) résolvent, pour $n > 1$ complètement le problème.

$$\lim. \frac{\overline{Mn}^2}{2\,H\,n} = \lim. \frac{\overline{MH}^2}{2\,H\,n} = \lim. \frac{\overline{MH}^2}{2\,H\,N} \times \frac{1}{\cos n\,\widehat{HN}}$$

Or la limite de $\frac{1}{\cos n\,\widehat{HN}}$ est égale à $\frac{1}{\sin\theta}$ si θ désigne l'angle du plan osculateur à la courbe C en M et du plan normal à S au même point suivant M T ; et la limite de $\frac{\overline{MH}^2}{2\,H\,N}$ est le rayon de courbure R de C en M. Ainsi le rayon de courbure de c en M est bien égal au rayon de courbure géodésique $\frac{R}{\sin\theta}$ de C au même point.



Cela posé, considérons une surface S′ applicable sur S, la transformée C′ de C, M′ l'homologue de M, les projections orthogonales c et c′ de C et de C′ sur les plans tangents respectifs P et P′ en M et M′. Afin de prouver l'égalité des rayons de courbure géodésique ρ et ρ' de C et de C′ en M et en M′ il suffit, d'après ce qui précède, de montrer que les courbes c et c′ ont, aux mêmes points, des rayons de courbure égaux.

Nous sommes ainsi conduits à porter notre attention sur le *mode de correspondance établi entre les points des deux plans tangents dans le voisinage des points de contact par les projections orthogonales respectives des points homologues des deux surfaces.*

Nous désignerons d'une manière générale par une même grand-

lettre, accentuée pour S', deux points correspondants sur les surfaces, par la même petite lettre, accentuée pour P', les projections de ces deux points sur les plans tangents.

Ayant fait choix d'un infiniment petit principal quelconque t et prenant deux points u et v dont les distances à M et la propre distance soient d'ordre infinitésimal égal à un, nous allons évaluer l'ordre des différences u v-u' v', M u-M' u', M v-M' v' des côtés des triangles rectilignes u M v, u' M' v', et l'ordre de la différence de leurs angles en M et M'.

Côtés. — Si l'on admettait la notion du ds^2 commun des deux surfaces

$$ds^2 = E\,d\alpha^2 + 2F\,d\alpha\,d\beta + G\,d\beta^2$$

le résultat serait immédiat ; car d'une part les distances u U, v V, sont du second ordre (au moins) et par suite les différences M U-M u, M V-M v, U V-u v du troisième, d'autre part les termes du second et du troisième degré de $\overline{UV}^2$ sont, les deux points étant obtenus pour les valeurs α, β ; $\alpha + h$, $\beta + k$ des paramètres.

$$Eh^2 + 2Fhk + Gk^2 + \frac{1}{2}\frac{\delta E}{\delta \alpha}h^3 + \left(\frac{\delta F}{\delta \alpha} + \frac{1}{2}\frac{\delta E}{\delta \beta}\right)h^2 k$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\frac{dG}{\delta \alpha} + \frac{dF}{\delta \beta}\right)hk^2 + \frac{1}{2}\frac{dG}{\delta \beta}k^3$$

Ainsi les différences de U V, U V' entre eux et respectivement avec u v et u' v', *donc aussi* u v-u' v' *sont au moins du troisième ordre*, et ce résultat s'applique évidemment à M u-M' u', M v-M' v'.

Si l'on ne veut pas faire appel à la notion du ds^2 commun on atteindra le même résultat par une analyse un peu plus détaillée.

Les distances M u et M v étant supposées d'ordre infinitésimal au moins égal à 1, considérons le plan perpendiculaire à P suivant u v ; il donne dans S un arc de section L allant de U à V ; je dis que cet arc, la corde U V et u v diffèrent entre eux d'infiniment petits du troisième ordre au moins. En rapportant la surface à son plan tangent en M un calcul simple montre que l'angle avec P d'une tangente quelconque à S en un point N infiniment voisin de M est au moins de l'ordre de M n ; on peut, d'une manière précise, trouver une quantité fixe λ telle que cet angle soit inférieur

à λ. Mu. Admettons d'abord que L n'ait pas de points d'inflexion, menons les tangentes UT, VT, on en conclut aisément que la différence (U T + V T) - u v et à fortiori les deux autres sont au moins du troisième ordre ; ce résultat subsiste en cas de points d'inflexion parce qu'il s'applique à chaque partie de la ligne décomposée par ces points en plusieurs arcs ayant chacun une concavité bien déterminée. D'une manière précise, il existe une constante μ telle que chacune des trois différences envisagées soit en valeur absolue inférieure à $\mu\ t^3$.

L'arc de S qui se projette suivant Mu lui est équivalent ; donc aussi l'arc correspondant de S' ; par suite M'u' qui lui est inférieur et de même M'v' sont au moins du premier ordre. Soit L'_1, l'arc *analogue* à L ; les différences entre L'_1, U'V' et u'v' sont du troisième ordre. Si les arcs L et L'_1, ne sont pas égaux, admettons que L soit le plus petit ; son homologue L' lui est égal, est inférieur à L'_1, et supérieur à U'V' ; parconséquent les différences entre deux quelconques des quantités L, L'_1, UV, U'V' et *notamment* u v et u' v' sont du troisième ordre. Ces résultats s'appliquent évidemment si, à l'un des points u, v, on substitue le point fixe M.

Angles. — Je dis que, si Mu et Mv sont du premier ordre, la différence des angles uMv, u'M'v' est au moins du second.

En effet, choisissons un nouveau point w dont la distance à M soit aussi du premier ordre ainsi que dans chacun des triangles uMw, vMw l'excès de la somme de deux côtés sur le troisième. Il en sera manifestement de même dans les triangles u'M'w', v'M'w'. Dès lors, comparant les expressions des tangentes de $\frac{M}{2}$ et de $\frac{M'}{2}$ dans les triangles uMw et u'M'w' dont les côtés homologues ont pour différences des infiniment petits du troisième ordre, on en conclut de suite la proposition en ce qui concerne ces angles ; la même propriété a lieu dans les triangles vMw, v'M'w', et par suite pour les angles considérés uMv, u'M'v' : si l'un d'eux est du premier ordre, l'autre lui sera donc équivalent.

Démonstration du théorème. — Nous prenons sur c les points u et v, les trois distances Mu, Mv, uv étant du premier ordre. Le rayon du cercle circonscrit au triangle M u v a pour expression $\frac{u\,v}{2 \sin u\,M\,v}$ et le rayon du cercle circonscrit à M' u' v', $\frac{u'\,v'}{2 \sin u'\,M'\,v'}$

Si l'un des rayons, le premier par exemple, a une limite finie,

non nulle, $\widehat{uMv}$ est du premier ordre, le second rayon est équivalent au premier : ils ont même limite. La propriété a encore lieu si l'un des angles est d'un ordre inférieur à 1, auquel cas les rayons tendent vers zéro. Enfin si l'un des rayons est infini, un des angles étant d'ordre supérieur à 1, il en va de même du second angle, l'autre rayon est infiniment grand.

Remarque. — On a pu constater plus haut la gêne qu'apporte la considération des infiniments petits des différents ordres tels qu'on les définit habituellement : ils sont essentiellement des fonctions de l'un d'eux. Or fréquemment se présentent dans le calcul des expressions qui dépendent non seulement de cette variable principale mais d'autres encore comprises entre certaines limites ; tel était tout à l'heure le cas de l'angle d'une tangente à L avec le plan P. En réalité, ce qui importe, c'est de savoir que dans telles conditions déterminées une certaine expression est inférieure en module à At^n, A et n étant des constantes, t la variable principale.

J'ai proposé (1) de dire qu'une expression E est, dans certaines conditions, *comparable supérieurement* (ou *inférieurement*) à une autre E′ lorsque $\left|\frac{E'}{E}\right|$ est supérieur (ou inférieur) à une quantité *positive* fixe, indépendante des variables figurant dans E et dans E′. Lorsqu'il n'y a point de doute sur le sens qu'implique le calcul poursuivi (ou lorsque E est comparable à la fois supérieurement et inférieurement à E′) on dirait plus brièvement que E est comparable à E′.

Avec cette notion le raisonnement gagne beaucoup en aisance et en netteté.

Autre exposé. — Lorsque l'on a établi d'une manière ou d'une autre que Mu, Mv, M′u′, M′v′ étant du premier ordre, u v-u′v′ est du troisième, on peut poursuivre comme il suit.

On sait que les arcs correspondants de S et de S′, ayant même longueur, les angles des lignes deux à deux homologues sont égaux. Plaçons les plans tangents l'un sur l'autre M′ en M de

(1) « Etude sur les fonctions entières orientées. » Annales de l'Ecole Normale Supérieure, année 1906.

manière que les tangentes aux lignes correspondantes coïncident, le sens sur deux d'entre elles étant le même et par suite sur toutes.

Cela posé, avec trois axes rectangulaires en M, l'axe des Z étant perpendiculaire au plan P, on a pour les équations des surfaces

$$z = f(x, y) \quad \text{et} \quad z' = g(x', y')$$

x, y, z; x', y', z' désignent les coordonnées de deux points homologues.

Le mode de correspondance pour les projections sera défini par des équations de la forme

$$\begin{cases} x' = a\,x + b\,y + c\,x^2 + 2\,d\,y\,x + e\,y^2 + \varepsilon_3 \\ y' = a'\,x + b'\,y + c'\,x^2 + 2\,d\,y'\,x + e'\,y^2 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

ε_3 désignant dans ce calcul divers infiniment petits du 3e ordre au plus quand $\sqrt{x^2+y^2}$ est du premier.

Soient x, y les coordonnées de u ; $x+h$, $y+k$ celles de v ; x' y' et $x'+h'$, $y'+k'$ celles de u' et de v'. On a d'abord $a = b' = 1$, $b = a' = o$ puisque les tangentes aux courbes correspondantes coïncident et que M u et M u' sont simultanément du premier ordre. Puis :

$$\begin{cases} h' = h + c\,(2xh + h^2) + 2d\,(yh + xk + hk) + e(2yk + k^2) + \varepsilon_3 \\ k' = k + c'\,(2xh + h^2) + 2d'(yh + xk + hk) + e'(2yk + k^2) + \varepsilon_3 \end{cases}$$

Or $\overline{u'v'}^2 - \overline{uv}^2 = (u'v' - uv)(u'v' + uv)$ quantité du 4e ordre x, y, h et k étant considérés comme du premier et indépendants. Donc, dans $h'^2 + k'^2 - (h^2 + k^2)$ le polynome du troisième degré en x, y, h, k doit être identiquement nul ; ce qui exige que

$$c = e' = d = d' = e = c' = o$$

On a par suite

$$\begin{cases} x' = x + \varepsilon_3 \\ y' = y + \varepsilon_3 \end{cases}$$

u u' est du troisième ordre par rapport à M u : donc v et u' décrivant les courbes c et c', les rayons de courbure de ces lignes en M sont égaux.

COMPLEXE DE DISPERSION

par M. le Dr Joseph DESCHAMPS

Le présent mémoire peut-être considéré comme un complément à deux autres mémoires que nous avons publiés dans le présent *Bulletin* sur l'emploi de la méthode graphique dans la théorie de la réfraction et dans la théorie des lentilles (1). Il s'agit encore ici de l'application de la méthode graphique à la théorie du prisme, mais à un point de vue nouveau, ainsi que nous allons l'exposer.

Les diverses circonstances de la marche des rayons lumineux dans le prisme sont régies par les formules dites du prisme ou formules de dispersion, au nombre de quatre :

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \text{Sine} = n \text{ Sin } r \\ (2) & \text{Sine}' = n \text{ Sin } r' \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (3) & r + r' = A \\ (4) & e + e' = D + A \end{array}\right\}$$

Ces quatre formules contenant sept quantités : e, e', r, r', n, A et D, trois d'entre celles-ci sont arbitraires, et par conséquent, l'ensemble de ces quatre formules constitue un système à *trois variables indépendantes*. C'est à ce point de vue que nous allons l'envisager.

Les trois variables indépendantes, que nous appellerons *naturelles*, sont les trois données, A, n et e du problème *direct* de la réfraction dans le prisme. Les quatre autres variables r, r', e' et D sont alors fonctions des trois premières, et parmi elles, la variable D doit être considérée comme la plus importante, car la déviation qu'elle représente, variable avec l'indice de réfraction quand A et e sont constants, est l'origine du phénomène de dispersion qui est le phénomène le plus important et le plus intéressant produit par le prisme.

En intervertissant les données de diverses façons, on obtient

---

(1) 1° Caustiques et anticaustiques (*Bulletin de la Société Philomatique*), 1902-1903, nos 3-4.

2° Optique graphique *(Ibidem, 1903-1904 n° 4)*.

ainsi plusieurs problèmes *inverses* dont on peut chercher la solution. Toutefois, nous prendrons souvent comme données ou variables indépendantes les trois quantités: e, e' et A, sans cesser de considérer le problème comme direct, l'indice de réfraction n pouvant se déduire assez facilement de ces trois éléments supposés connus. Ce choix présente, en effet, l'avantage de conserver dans le problème de la dispersion la symétrie qui existe entre e et e' dans les formules fondamentales.

— Cela étant, il est naturel de chercher à représenter géométriquement les *variations* des variables indépendantes et de leurs fonctions dans le phénomène de la dispersion. Cette représentation permet, en effet, d'embrasser d'un coup d'œil la continuité du phénomène et met en évidence des faits que ne montrent pas les équations de liaison.

Tel est l'objet de ce nouveau Mémoire.

1. — Marche adoptée pour la représentation du phénomène de dispersion.

En raison du nombre des variables indépendantes, qui est ici égal à trois, il est impossible d'employer l'un des modes de représentation ordinairement adoptés, qui consistent en courbes ou en surfaces. Une courbe, plane ou gauche, est en effet la représentation graphique d'un phénomène comportant une seule variable indépendante, tandis qu'une surface est la représentation d'un phénomène à deux variables indépendantes. Les courbes planes qui sont celles que l'on construit ordinairement dans ce genre d'opérations, sont fournies par la géométrie à deux dimensions ; les surfaces le sont par la géométrie à trois dimensions.

Les variables indépendantes étant au nombre de trois, il est alors conforme à la méthode géométrique de chercher à emprunter à la géométrie à quatre dimensions le principe de la représentation cherchée. Nous allons exposer en quelques mots ce principe qui se rattache à la théorie des *complexes de droites*.

Complexes de droites. — La géométrie des complexes de droites est l'extension de la géométrie *tangentielle* plane, dans laquel-

le l'élément de formation des figures est, non plus le point, mais la droite.

Les équations d'une droite variable quelconque, c'est-à-dire susceptible de se déplacer autrement que dans un seul plan, sont sous leur forme la plus simple.

$$(5)\quad x = m\,z + p$$
$$(6)\quad y = n\,z + q$$

Elles contiennent quatre coefficients ou paramètres m, n, p, q, dont la connaissance détermine la position de la droite par rapport à un système de trois plans coordonnés. Ces paramètres sont d'ailleurs susceptibles de prendre toutes les valeurs possibles, positives ou négatives et correspondent toujours à une droite et à une seule, quel que soit l'ensemble des valeurs attribuées à ces quatre paramètres. Réciproquement, à une droite de position définie correspond un groupe déterminé de valeurs de ces quatre paramètres.

Pour cette double raison, ces quatre paramétres s'appellent *les coordonnées* de la droite, et l'ensemble des considérations qui se rattachent à leur existence constitue la Géométrie *à quatre dimensions.*

Quand les paramètres de la droite restent complètement indéterminés, les équations (5) et (6) représentent toutes les droites possibles. Mais, lorsque ces quatre paramètres sont liés par une équation de la forme générale

$$(7)\qquad F(m, n, p, q) = 0,$$

qui déterminent un des paramètres en fonction des trois autres, les équations (5) et (6), dans lesquelles les paramètres satisfont à l'équation (7), cessent de s'appliquer à toutes les droites possibles, pour ne plus convenir qu'à un groupe de droite. L'ensemble de toutes ces droites, dont trois des coordonnées restent arbitraires constitue un système à indétermination *triple* et s'appelle *un complexe de droites.*

Il peut arriver que les coordonnées de la droite, au lieu d'être liées par une seule équation de la forme (7), soient liées entre elles, et à k autres variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots K_k$, par $k + 1$ équations.

$$(8)\quad \begin{cases} F_1(m,\ n,\ p,\ q,\ \alpha_1\ \alpha_2,\ \ldots\ldots\ \alpha_k) = 0 \\ F^2(m,\ n,\ p,\ q,\ \alpha_1\ \alpha_2,\ \ldots\ldots\ \alpha_k) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k\quad (m, n, p. q, \alpha_1, \alpha_2. \ldots\ldots\ \alpha_k) = 0 \\ F_k + 1\,(m, n, p, q, \alpha_1, \alpha_2. \ldots\ldots\ \alpha_k) = 0 \end{cases}$$

On a ainsi un système de k + 1 équation à k + 4 variables, c'est-à-dire un système à indétermation triple. L'ensemble de toutes les droites en nombre illimité dont les coordonnés satisfont aux équations (8) constitue encore un complexe.

— Supposons maintenant qu'étant donné un complexe représenté par l'équation (7) ou par les équations (8), on fixe l'une des coordonnées m, n, p, q, ou ce qui revient au même, que l'on ajoute à l'équation ou aux équations du complexe une condition de plus de la forme

$$(9)\quad f(m,\ n,\ p,\ q) = 0$$

si on ne considère que ces quatre variables, ou de la forme

$$(9')\quad f\ (m,\ n,\ p,\ q,\ \alpha_1, \alpha_2,\ m\ \alpha_k) = 0,$$

si l'on considère aussi les variables supplémentaires α_1, α_2,.... α_k ; l'ordre de l'indétermination s'abaisse et celle-ci devient double. L'ensemble de toutes les droites dont les coordonnées satisfont à toutes les conditions imposées devient *une congruence de droites*.

Si maintenant, au lieu de joindre à l'équation (7) ou deux équations (8), une seule condition, on en ajoute deux :

$$(10)\quad f_1\ (m,\ n,\ p,\ q) = 0$$
$$(11)\quad f_2\ (m,\ n,\ p,\ q) = 0$$

l'ordre de l 'indétermination s'abaisse de deux unités ; celle-ci devient simple, et alors l'ensemble des droites dont les coordonnées satisfont à toutes ces conditions forme *une surface réglée*.

Enfin, quand le nombre des conditions snrajoutées est égal à trois, l'indétermination disparaît et un nombre limité de droites satisfait seul aux conditions imposées.

— En résumé, étant donné un complexe de droites, on peut, en ajoutant à son équation une, deux ou trois conditions, en détacher

une congruence réglée, une surface réglée, ou un nombre limité de droites.

II. — Construction des génératrices du complexe de dispersion.

Si l'on se reporte aux explications précédentes, le complexe de dispersion est ici représenté par un système de quatre équations entre les sept variables ; e, e', r, r' n, A et D, parmi lesquelles quatre doivent être regardées comme les coordonnées des génératrices de ce complexe, et choisies comme telles, les trois autres étant alors des variables accessoires. Ce choix peut se faire de plusieurs manières. Toutefois, la symétrie des équations (1), (2) et (4) entre e et e' d'une part, D et A d'autre part, nous engage à prendre pour les coordonnées m. n, p, q, les quantités suivantes

$$m = e. \qquad n = e'$$
$$p = A. \qquad q = D$$

Les équations des génératrices du complexe sont alors

$$(13) \quad x = e\,z + A$$
$$(14) \quad y = e'\,z + D$$

Et comme l'équation (4)

$$(4) \quad e + e' = A + D$$

contient précisément ces quatre variables et celles-là seulement, elle peut être regardée comme l'équation de ce complexe, équation servant à déterminer une des quatre variables qu'elle contient en fonction des trois autres supposées connues ou arbitrairement choisies.

Quant aux trois autres équations

$$(1) \quad \text{Sin } e = n\,Sin\,r$$
$$(2) \quad \text{Sin } e' = n\,Sin\,r'$$
$$(3) \quad r + r' = A$$

qui accompagnent l'équation (4), elles servent alors à déterminer ces fonctions des variables e et e', déjà considérées, les trois variables accessoires r, r' et n, parmi lesquelles la plus importante est certainement l'indice de réfraction. Mais nous reviendrons plus loin sur ce sujet.

Revenons actuellement aux équations (13) et (14). A un système de valeurs de e, e', A et D satisfaisant à l'equation (4), correspond la droite représentative de l'ensemble de ce système, droite qui est l'intersection des deux plans représentés par les équations (3) et (4). Ces plans sont les plans projetant la droite sur les plans $z\,o\,x$, $z\,o\,y$, et coupant ces plans coordonnés respectivement suivant les deux droites représentées par ces mêmes équations. La connaissance de ces deux dernières droites, projections de la génératrice sur les plans $z\,o\,x$, $z\,o\,y$, suffit pour faire connaître la position de la droite dans l'espace.

Avec ce mode de représentation, il est facile de construire la génératrice représentative du système de valeurs des variables e e', A et D, qui caractérisent un couple de rayons, l'un incident, l'autre émergent, à travers un prisme d'angle A.

En effet : 1° A et D (Fig. 1) sont les coordonnées de la trace de la droite sur le plan $x\,o\,y$, comme on le vérifie en faisant $z = o$ dans les équations (13) et (14).

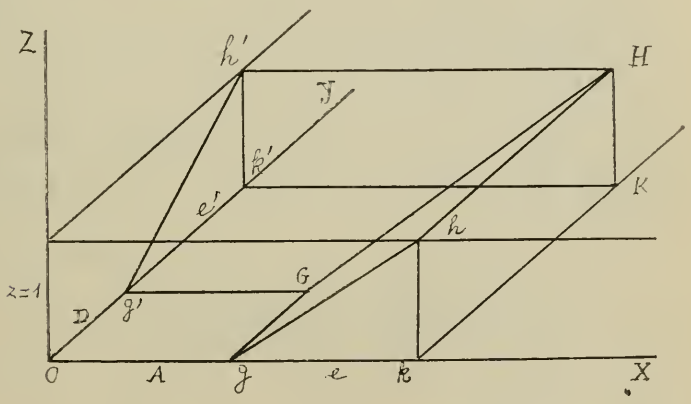


FIG. 1.

2° Si l'on fait $z = 1$ dans les mêmes équations, ce qui revient à chercher le point où la droite rencontre le plan $z = 1$ on trouve

$$x - A = e$$
$$y - D = e'$$

Les quantités e et e' représentent donc dans le plan $z = 1$ les

coordonnées de ce point de rencontre, l'origine ayant été transportée au point $n = A$, $y = D$.

En ne conservant de la génératrice que la portion G H comprise entre les plans $z = o$ et $z = 1$, portion que nous appellerons *le segment principal* de cette génératrice, et dont les projections sont $g\ h$ et $g'\ h'$, on voit aisément qu'on a

$$\left\{\begin{array}{l} \text{O g} = A \\ \text{O g}' = D, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \text{G k} = e \\ \text{G}' \text{k}' = e'. \end{array}\right.$$

On a ainsi sur deux plans rectangulaires X O Z, Y O Z la représentation complète des éléments déterminatifs d'un phénomène de dispersion, éléments contenus tout entier dans le segment G H.

La possibilité de projeter ainsi ce segment sur deux plans introduit ici les avantages du procédé de représentation de la géométrie descriptive, avantages dont nous allons bientôt profiter et qui nous fourniront des résultats d'une grande simplicité.

— Avant d'aller plus loin, nous voulons faire observer que la considération du segment principal d'une droite nous dispense de la considération hétérogène du coefficient angulaire et nous permet d'attribuer aux quatre coordonnés d'une droite une même signification qui est celle d'éléments rectilignes comptés sur les seuls deux axes OX, OY. Ces éléments rectilignes représentent ici les longueurs rectifiées des arcs dont e, e', A et D représentent les mesures.

Nous tenons également à rappeler que, en traitant la même question de la représentation du phénomène de dispersion, mais par un procédé différent du nôtre, M. le comte A. de Gramont a fait lui aussi usage de cette méthode de rectification des arcs e, e' et D (1).

Nature du Complexe de dispersion. — L'équation

$$(4)\quad e + e' = A + D$$

qui représente, ainsi que nous l'avons dit, le complexe de dispersion, étant du premier degré par rapport à toutes les coordonnées

(1) A. de Gramont. Sur quelques conséquences des formules du prisme. (Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, Mars 1900).

de la droite qui en est l'élément, *ce complexe rentre dans la catégorie des complexes linéaires*, lesquels sont les plus simples de tous. Le complexe linéaire est en effet, relativement aux complexes en général, ce que le plan est par rapport aux surfaces et la droite par rapport aux lignes. Le complexe de dispersion possède donc des propriétés connues qui pourraient être examinées en détail. Mais nous allons chercher simplement par quelles circonstances géométriques se traduisent les phénomènes les plus usuels de la dispersion.

III. — Congruence du Complexe de dispersion correspondant à A = cons^{te}

Si nous nous donnons l'angle A du prisme, nous fixons une des variables du complexe et par conséquent nous abaissons l'ordre de l'indétermination qui devient double, au lieu d'être triple. Les génératrices correspondant à cette valeur de A forment donc, ainsi que nous l'avons expliqué, une congruence particulière qui se détache du complexe de dispersion et que nous allons examiner. L'hypothèse $A = C^{te}$ entraîne $Og = C^{te}$. Il en résulte que *toutes les générations de cette congruence rencontrent une même droite du plan* x o y, *qui est la parallèle menée par le point* y *à l'axe* o y.

Nous avons ainsi une propriété générale immédiate de la congruence que nous considérons et dont nous allons continuer l'étude par l'introduction de nouvelles hypothèses.

1° Surface réglée des génératrices de déviation minima.

Faisons l'hypothèse $e = e'$, qui correspond à la déviation minima D_m qui peut subir un rayon lumineux d'indice déterminé. L'équation du complexe se réduit à

$$(15)\quad 2e = A + D_m,$$

qui lie les deux variables e et D_m et fixe l'une en fonction de l'autre. L'ordre de l'indétermination s'abaisse encore d'une unité, et celle-ci devient simple. Les équations générales (13) et (14) de la génératrice deviennent alors

$$(16)\quad x = e\,z + A$$
$$(17)\quad y = e\,z + D_m$$

équation ne contenant plus qu'une variable indépendante. L'ensemble des génératrices ainsi représentées forme par suite une surface réglée, que nous appellerons *la surface de déviation minima*.

L'équation de cette surface s'obtient en éliminant les variables e et D_m entre les équations (15), (16) et (17). Mais il est possible de déterminer directement, et sans faire cette élimination, la nature de la surface recherchée et de construire géométriquement ses génératrices.

En effet 1° l'équation (16) définit dans le plan $x\,o\,z$ une droite $g\,h$ mobile autour du point fixe g, et dont les diverses positions s'obtiennent en prenant des longueurs de $g\,k$ aux valeurs valeurs variables de l'incidence e. Par conséquent *les génératrices de la surface s'appuient* (comme d'ailleurs toutes les génératrices de la congruence) *sur la droite fixe*

$$(18)\quad \begin{cases} x = A \\ z = o \end{cases}$$

qui est parallèle à o y.

2° L'équation (17), qui contient deux paramètres variables e *et* D_m liés par une relation, définit une droite mobile qui admet dans le plan $y\,o\,z$ une enveloppe, et comme l'équation de liaison est liaison est linéaire, cette enveloppe se réduit à un point qu'il est facile de trouver. Remplaçons pour cela dsns l'équation (17) D_m par sa valeur

$$D_m = 2e - A$$

tirée de (1), celle-ci devient

$$y = e\,z + 2e - A,$$

et l'on vérifie aisément que cette dernière est satisfaite, quelque soit e. si l'on y fait

$$y = -A,\ z = -2.$$

La droite en question passe donc constamment par le point de coordonnées : $y = -A$, $z = -2$.

Il en résulte *que la génératrice s'appuie constamment sur la droite*

$$(12)\quad \begin{cases} y = -A \\ z = -2 \end{cases}$$

qui est parallèle à O X.

3° Si entre les équations (16) et (17) on élimine z, on trouve l'équation

$$(20)\quad x - y = A - D_m,$$

équation d'un plan dans lequel se trouve la génératrice. Comme ce plan est, quel que soit D_m, parallèle au plan bissecteur des deux plans $x\ o\ z$, $y\ o\ z$, il en résulte *que toutes les génératrices de la surface sont parallèles à un même plan.*

En résumé, les génératrices de dispersion minima s'appuient sur deux droites fixes non situées dans un même plan et restent constamment parallèles à un plan fixe non parallèle aux deux droites. *Elles sont par conséquent les génératrices d'un paraboloïde hyperbolique.*

— Revenons maintenant aux projections de la génératrice de ce paraboloïde sur le plan $y\ o\ z$. Ces projections sont faciles à construire. Elles passent en effet toutes, comme nous venons de démontrer par le point M de coordonnés $y = -A$, $z = -2$.

Menons par ce point M (Fig. 2) une droite rencontrant l'axe $o\ y$ en un point g' situé sur sa région positive, et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre en h' avec la droite $z = 1$, point que nous projetons en k' sur $o\ y$. Les longueurs $o\ g'$ et $g'\ k'$ représentent respectivement, d'après ce qui a été dit plus haut, les variables D_m et e', ou, à cause de $e' = e$, les deux variables D_m et e, qui sont fonctions l'une de l'autre. En prenant arbitrairement $o\ g' = D_m$, on voit que cette construcion très simple détermine $g'k' = e$. En d'autres termes on obtient par là la valeur commune e de l'indice et de l'émergence qui correspondent à une déviation minima D_m choisie arbitrairement.

Donc *une droite, telle que* Mg' h', *menée par le point* M *dans le plan* y o z *représente complètement tous les éléments angulaires qui entrent dans la réfraction d'un rayon lumineux avec déviation minima.*

Nous donnerons au point M le nom de *pôles des déviations minima.*

Il resterait à déterminer et à représenter l'indice n qui correspond à cette déviation arbitraire $Og' = D_m$; mais nous traiterons cette question plus loin.

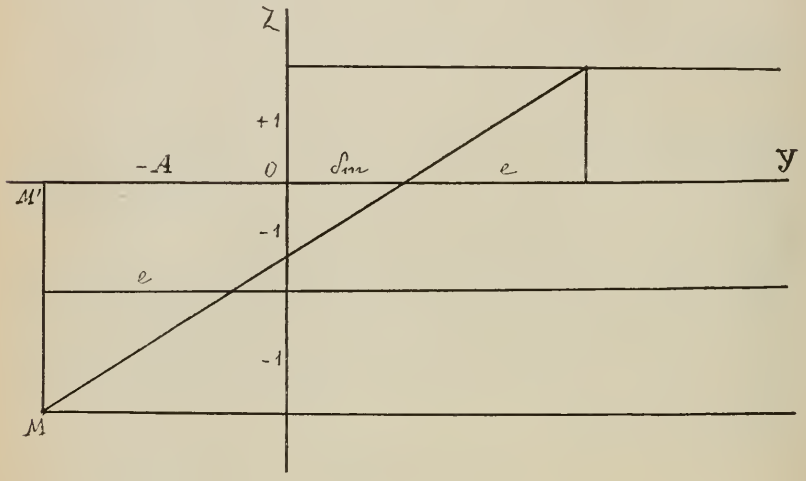


FIG 2.

2° Surface réglée des génératrices d'égale incidence.

Remplaçons maintenant l'hypothèse, qui vient d'être faite $e = e'$ par l'hypothèse nouvelle $e = C^{te}$, c'est-à-dire supposons que tous les rayons qui tombent sur le prisme ont une même direction. Nous fixons encore un second paramètre variable, et par conséquent les génératrices correspondantes sont sur une même surface que nous nous proposons de déterminer.

Nous remarquerons pour cela que les deux points g et k restent fixes, l'un et l'autre, en vertu des hypothèses $Og = A = C^{te}$. La droite gh reste donc elle-même fixe, et par suite le plan projetant la génératrice GH sur le plan XOZ reste constamment le même. Donc *le lieu de la génératrice G A est ce plan lui-même représenté par l'équation*

$$(16)\quad x = ez + A.$$

Mais il ne faut pas en conclure que toute droite de ce plan peut

être regardée comme génératrice de la surface; il est en effet nécessaire que les coordonnées des divers points de cette droite satisfassent en outre à la seconde équation

$$(17)\ y = e'\,z + \mathrm{D},$$

qui est celle de sa projection sur le plan YOZ. Les variables e' et D étant liées par la relation linéaire

$$(4)\ e + e' = \mathrm{A} + \mathrm{D},$$

cette projection enveloppe, comme dans le cas précédent, un point, qu'on trouve aisément en éliminant D entre les deux équations (17) et (4), ce qui donne

$$y = e'\,z + e + e' - \mathrm{A},$$

et en remarquant que cette dernière est satisfaite, quel que soit, e', par $z = -1$ et $y = e - \mathrm{A}$.

Donc *les projections sur le plan* YOZ *de toutes les génératrices du plan* (16) *qui constitue la surface actuellement considérée passent par un même point.*

Il résulte de là que les génératrices elles-mêmes s'appuient toutes sur la droite, parallèle à O X, ayant pour équations

$$(21)\ \begin{cases} z = -1 \\ y = e - \mathrm{A}; \end{cases}$$

et comme ces génératrices ne sortent pas du plan (16), *elles passent toutes par un même point, qui est le point de rencontre de la droite représentée par les équations* (21) *avec le plan représenté par l'équation* (16).

— Revenons à nouveau au plan $y\ o\ z$ dans lequel nous avons trouvé un point P (Fig. 3) de coordonnées $z = e - A$, par lequel passent les projections sur ce plan de toutes les générations d'égale incidence. Nous appellerons ce point *le pôle correspondant à l'incidence* e.

En joignant ce point à un point de la région positive de l'axe $o\ y$, et en prolongeant la droite de jonction jusqu'à la droite $z = x$, on aura, d'après les mêmes explications que plus haut, la représentation géométrique des éléments e' et D du rayon émergent correspondant.

Quand l'angle d'incidence varie, le pôle se déplace sur la droite $z = -1$, le déplacement étant toujours égal à la variation de e.

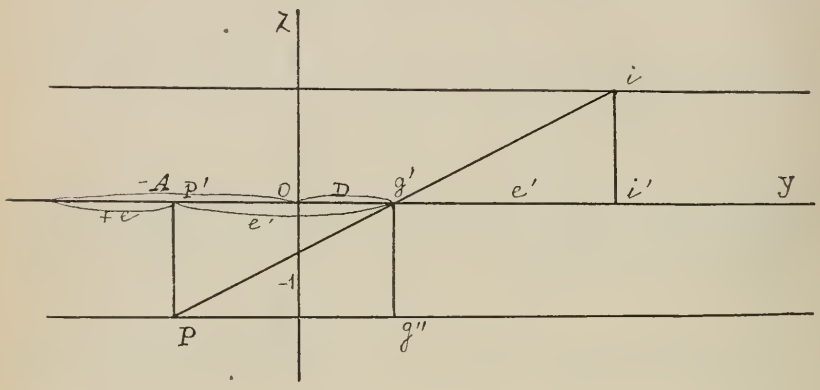


FIG 3.

En résumé, *un pôle, c'est-à-dire un point de la droite* $z = -1$ *correspondant à une valeur positive* de, *et une droite issue ce pôle représentent par leur ensemble les trois éléments* e, e' *et* D *caractéristiques d'un phénomène dispersion, l'angle* A *étant supposé constant.*

On peut même remarquer qu'il est inutile, pour avoir la valeur de e' de prolonger la droite Pg' issue du pôle P jusqu'à sa rencontre en i avec le droite $z = 1$. En projetant le point g' en g'' sur la droite $z = -1$, on voit qu'on a $Pg'' = g'i' = e'$. D'ailleurs, sur la figure ainsi construite, on vérifie immédiatement la relation

$$e + e' = A + D.$$

En principe, c'est-à-dire en envisageant les choses au point de vue algébrique général, on peut joindre le pôle P à un point quelconque de l'axe o Y. Nous avons néanmoins indiqué qu'il ne doit être joint qu'aux points situés sur la région positive de cet axe ; la raison en est que nous ne voulons construire ici que les droites correspondant à une réalité physique. C'est pourquoi, même parmi les droites de jonction correspondant à une incidence e on doit écarter celles qui correspondent à une émergence e' supérieure à 90°. Par conséquent, toutes les droites à construire sont

comprises : d'une part, entre la droite P O qui joint le pôle à l'origine, laquelle correspond à une déviation nulle et par conséquent à l'indice $n = 1$; et, d'autre part, entre la droite qui, issue du pôle P, correspond à l'émergence maxima $e' = 90°$. Quant au pôle lui-même P, il ne doit pas être placé à une distance $m' P = e$ supérieure à 90°.

Les mêmes remarques s'appliquent aux droites issues du pôle M des déviations minima dans le cas précédent. Toutes ces droites doivent être comprises entre la droite M O qui correspond à une déviation nulle pour $n = 1$ et fournit l'indice minima d'une part, et d'autre part entre la droite qui correspond à l'incidence maxima de 90°.

Il est possible de réunir en une seule figure (Fig. 4) les figures construites dans les deux cas qui viennent d'être examinés ;

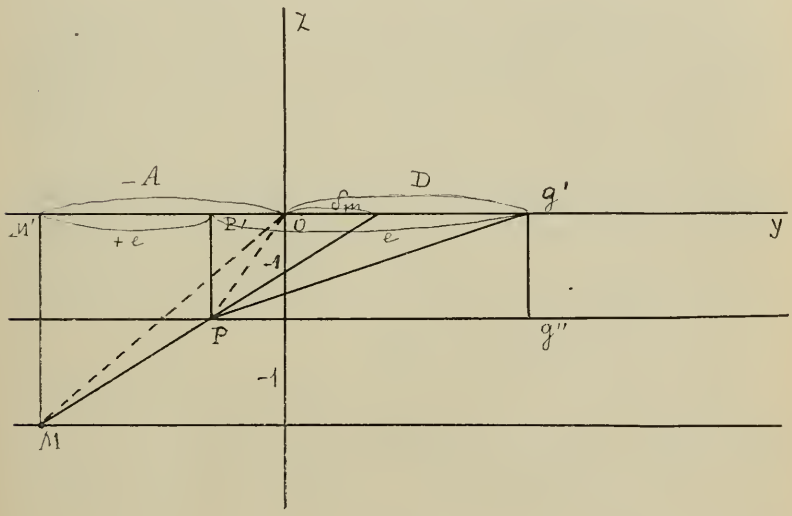


FIG. 4

cela permet d'embrasser d'un seul coup d'œil, toutes les circonstances du phénomène de la dispersion. Cette réunion donne lieu aux remarques suivantes :

En premier lieu, la présence de la droite $z = -1$ permet de ne pas prolonger les droites issues du pôle M jusqu'à la

droite $z = 1$. Comme pour les droites issues du point P, on retrouve sur la droite $z = -1$, et ici à partir du point en projection de M sur cette droite, les valeurs communes de l'incidence et de l'émergence.

En second lieu, les deux surfaces réglées qui viennent d'être étudiées, paraboloïde hyperbolique et plan, ont une génératrice commune dont la projection sur le plan Y O Z s'obtient en réunissant par une droite les deux pôles M et P. Cette droite correspond à celui des rayons tombant suivant l'incidence e dont l'indice est tel qu'il subit au passage dans le prisme la déviation minima.

Toutefois cette droite commune ne correspondant à un rayon réellement émergent que si l'incidence e correspond au pôle P est au moins égale à la valeur minima $\frac{A}{2}$ que doit avoir l'angle d'incidence pour qu'il puisse y avoir déviation minima.

Tous ces résultats sont d'une grande simplicité, ce qui tient sans doute à la simplicité de la relation à représenter géométriquement. Il est néanmoins permis de faire remarquer que la complication apparente du procédé employé n'a pas nui à la simplicité et à la clarté du graphique obtenu. Il est donc légitime de penser que ce mode de représentation est susceptible d'extension, c'est-à-dire susceptible d'être employé dans des cas analogues où les phénomènes peuvent dépendre de trois variables indépendantes, et alors, si les résultats obtenus peuvent être d'une simplicité moins grande, ils ne seront cependant pas dénués ni de commodité ni de clarté.

—Il nous reste maintenant à nous occuper des indices qui correspondent à chaque rayon incident dont nous avons obtenu la représentation. Or, nous avons mentionné plus haut que ces indices variables constituent avec les angles r et r' des variables accessoires, qui deviennent des fonctions d'une seule variable indépendante dans les deux cas qui viennent d'être examinés, où l'on a abaissé l'ordre de l'indétermination jusqu'à la rendre simple. Le mode de représentation de ces indices ne rentre donc pas dans celui qui vient d'être exposé ; il se fera par une courbe, comme tous les phénomènes rattachés à une seule variable indépendante. La déviation D. qui est l'aboutissant des considérations

Or il y a aussi sur sa courbe des déviations minima deux points J′ et J″ infiniment voisins du point I et correspondant aux mêmes indices $n - \varepsilon$ et $n + \varepsilon$ et à des déviations $D - \gamma$, $D + \gamma$, qui sont minima pour les mêmes indices. Il en résulte

$$D - \gamma < D - \delta$$
$$D + \gamma < D + \delta$$

et par conséquent les points I′ et J′ qui sont sur une même parallèle à $o\,y$, puisqu'ils correspondent à une même valeur $n - \varepsilon$ de l'ordonnée des deux courbes sont tels que le point I′ est à droite du point J′.

De la même manière le point I″ est à droite du point J″. Dans l'arc I′ I I″ de la courbe des incidences constantes est tout entier à droite de l'arc J′ I J″ de la courbe des déviations minima, et par conséquent ces deux courbes sont tangentes en I, comme nous l'avons annoncé.

Il suit de là que *la courbe des indices pour les déviations minima est tangente à toutes les courbes d'incidence constante qu'on peut obtenir en faisant varier* e *de* $\frac{A}{2}$ *à* $90°$ *et que par conséquent elle est leur enveloppe.*

Les courbes d'indices possèdent encore d'autres propriétés intéressantes, mais sur lesquelles nous n'insisterons pas dans ce présent travail où les indices ne figurent, comme nous l'avons dit, qu'à titre de variables accessoires.

lorsqu'on connaît deux de ces éléments, fournit par là même le troisième élément inconnu.

Ainsi supposons connus e et n. Prenons (Fig. 5) sur la circonférence trigonométrique l'arc $AM = e$; prenons sur la tangente en A une longueur $AT = n$, et, après avoir mené la droite OT, rappelons $MP = \text{Sin } e$ en BC. Il est clair qu'on a

$$OC = \text{Sin } r.$$

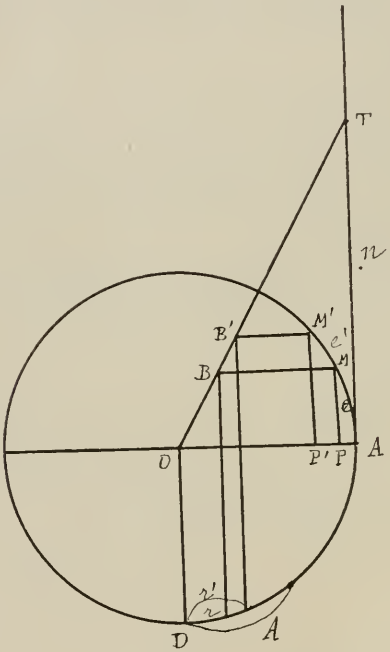


FIG. 5

Cette construction très simple montre que l'on peut inversement obtenir n connaissant e et r, ou bien e, lorsqu'on connaît n et r.

La même construction s'applique à la formule

$$(2)\quad \text{Sin } e' = n \text{ Sin } r.$$

— Cela étant, supposons 1° que dans le problème de la dispersion on se donne les valeurs des trois variables A, e et n que

nous avons appelées les variables naturelles. On construira, comme il vient d'être dit, Sin r et par suite l'arc r. La relation

$$r + r' = A$$

permettra la construction de l'arc r', d'où, par la formule (2), on construira l'arc e' lequel entraîne la connaissance de la déviation D.

Supposons 2° que l'on se donne les angles e et e', ce qui est le cas des constructions que nous avons précédemment exposées. Il s'agit alors de calculer l'indice n, pour obtenir le point correspondant de la courbe représentative des indices que nous voulons construire.

Cette construction de l'indice n ne peut pas se faire directement, il faut d'abord construire l'un au moins des arcs r et r'. A cet effet, on remarque que des formules (1) et (2) on déduit par division

$$\frac{\sin e'}{\sin e} = \frac{\sin r}{\sin r'}$$

d'où

$$\frac{tg\,\frac{e - e'}{2}}{tg\,\frac{e + e'}{2}} = \frac{tg\,\frac{r - r'}{2}}{tg\,\frac{r + r'}{2}}$$

ou à cause de $r + r' = A$

$$\frac{tg\,\frac{e - e'}{2}}{tg\,\frac{e + e'}{2}} = \frac{tg\,\frac{r - r'}{2}}{tg\,\frac{A}{2}}$$

Cette solution permet la détermination *graphique* de $tg\,\frac{r\,r'}{2}$ d'où l'on déduit *graphiquement* l'arc $\frac{r - r'}{2}$ et par suite l'arc r.

La construction du triangle O B C fournit alors la longueur A T $= n$.

Il n'y a plus qu'à répéter ces constructions autant de fois que l'on veut en faisant varier les arcs e et e' ou l'un d'eux seulement. On peut donc construire par points avec toute la précision voulue les courbes d'indices que nous nous proposons d'obtenir, soit

dans le cas de la déviation minima en faisant varier les arcs e et e', soit dans le cas d'une incidence quelconque en fixant une fois pour toutes l'arc e et en faisant varier l'arc e'.

On remarque même que dans le cas de la déviation minima les constructions se réduisent au mininum, car on a alors

$$r = r' = \frac{A}{2}$$

$$e = e' = \frac{A + D}{2}$$

Tout se réduit à la formule unique

$$\frac{\sin \frac{A + D}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = n$$

ou

$$\frac{\sin e}{\sin \frac{A}{2}} = n$$

dans laquelle on fera varier e de $\frac{A}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ ou de $\frac{A^\circ}{2}$ à 90° suivant le procédé de mesure de l'arc. La courbe correspondant à ce cas est un quart de sinussoide.

Supposons donc construites ces deux courbes d'indices : l'une, des déviations minima, l'autre, correspondant à une incidence e. Comme les deux surfaces réglées relatives à ces cas ont une génératrice commune, (à condition toutefois qu'on ait $e > \frac{A}{2}$), ce qui entraine dans nos graphiques un rayon commun ayant sur l'axe $o\,y$ une extrémité commune, les deux courbes d'indices ont un point commun I. Or je dis qu'en ce point elles sont tangentes. Considérons en effet sur la courbe des incidences constantes deux points I' et I'' infiniment voisins du point I et de part et d'autre de ce point; ils correspondent respectivement à des valeurs $n - \varepsilon$, $n + \varepsilon$, infiniment voisine de la valeur de l'indice n correspondant au point I, et à des déviations $D - \delta$, $D + \delta$, infiniment voisine de la déviation D correspondant au même point.

précédentes, peut être regardée comme cette variable, et comme ses diverses valeurs sont comptées sur l'axe O Y à partir de l'origine O, on voit que les courbes de variation d'indices que nous avons à construire peuvent être superposées aux graphiques précédents, sans nuire à leur simplicité et à leur clarté. Cette adjonction, une fois faite, permettra de considérer le phénomène de la dispersion dans tous ses détails et éléments.

Nous donc à voir comment on contruira : 1° La courbe des indices correspondant à des déviations minima variables ; 2° La courbe des indices correspondant à des rayons qui, tombant suivant une même incidence, correspondent à des émergences et par conséquent à des déviations variables.

Or la question de la construction de ces courbes se ramène à une question unique, savoir la recherche de l'indice n correspondant à une détermination des trois variables indépendantes dont dépend le phénomène de la dispersion. Sans doute cette recherche de l'indice peut se faire algébriquement par les règles ordinaires du calcul ; mais on s'aperçoit sans peine que les formules de dispersion contenant à la fois des angles et les sinus de certains d'entr'eux, les calculs, sans être difficiles, sont dénués de commodité et de simplicité.

Nous allons montrer que la méthode graphique lève toutes ces difficultés et qu'elle s'applique entièrement avec toute sa perfection à cette question comme à toute autre question de l'optique géométrique.

IV. Graphiques se rattachant à l'indice *n* et permettant sa détermination.

Considérons d'abord la formule

$$(1) \quad \sin e = n \sin r$$

ou

$$\frac{\sin e}{\sin r} = n$$

Elle montre que *sin e* et *sin r* étant les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, n représente la tangente de l'angle aigu opposé à *sin e*. La construction de ce triangle, étant possible

Les récentes Recherches Océanographiques en Norvège

par Ch. GRAVIER

I

L'immense nappe liquide qui recouvre plus des trois quarts de la surface du globe terrestre ne demeure jamais à l'état de repos : elle présente des oscillations rythmiques dues à l'action combinée de la lune et du soleil et qui constituent le phénomène des marées ; de plus, sa surface est fréquemment couverte de rides plus ou moins fortes (houle)produites par le vent ; en outre, on observe dans sa masse des mouvements plus ou moins étendus, permanents ou temporaires, orientés dans une direction déterminée : ce sont les courants marins que l'on peut considérer comme de véritables fleuves océaniques. Parmi eux, les uns se localisent à la surface, les autres se maintiennent à diverses profondeurs.

Les courants superficiels sont, de beaucoup, ceux sur lesquels on possède le plus de renseignements. Ils ont une importance spéciale pour la navigation et, de plus, l'étude en est beaucoup plus accessible que celle des courants de profondeur. Il n'en est cependant qu'un petit nombre qui aient été l'objet de recherches approfondies ; parmi ceux-ci, se place en premier lieu le Gulf Stream. En 1885, les ingénieurs hydrographes américains firent une longue et instructive série de mesures dans la partie de ce grand courant qui traverse le détroit de Floride.

La plupart des mesures relatives aux courants superficiels n'ont d'ailleurs été faites qu'au voisinage des côtes, en eau peu profonde, généralement sur des bateaux-feu ou phares flottants. Jusqu'en ces dernières années, on n'avait tenté aucune mesure au large, en pleine mer, pas plus pour les courants de surface que pour ceux de profondeur.

L'étude de ces courants, à laquelle se lient étroitement les

mesures de température, de salinité et de gaz dissous dans l'eau de mer, présente cependant un haut intérêt à divers points de vue. Beaucoup de ces « fleuves océaniques » dont les caractéristiques physiques ne sont pas les mêmes que celles du milieu ambiant, peuvent, lorsqu'ils ne sont pas à une trop grande profondeur, avoir une faune et une flore différentes de celles des eaux qui les entourent. Les animaux prédateurs doivent rechercher avidement ceux qui sont le plus riches en organismes variés ; il est vraisemblable de penser que les migrations des poissons ne sont pas sans relation avec ces cours d'eau nourriciers.

A l'étude des courants, se rattachent un grand nombre de questions biologiques des plus importantes et des plus difficiles à résoudre actuellement, comme par exemple : les relations de nutrition entre la faune de la surface (Plankton) et celle qui vit sur les fonds (Benthos de Hæckel) (1) ; les migrations dans le sens vertical des animaux qui nagent à des profondeurs plus ou moins considérables, à une certaine distance du fond (animaux bathypélagiques) ; l'accumulation périodique d'organismes pélagiques en certaines régions, etc. En un mot, la connaissance des courants est indispensable pour comprendre la circulation de la matière organique à travers l'océan, pour concevoir ce que les Allemands appellent la « Stoffwechsel ».

Lorsqu'on sera mieux renseigné sur les courants de profondeur, peut-être pourra-t-on expliquer certaines particularités faunistiques, aujourd'hui encore très énigmatiques, comme semble l'indiquer le fait suivant. Dans la partie centrale de la Mer du Nord, au nord du Doggerbank, à des profondeurs comprises entre 50 et 100 mètres environ, le fond est couvert par une couche d'eau tranquille à température relativement basse. En 1904, B. Helland-Hansen a découvert l'existence, autour de cette région, au voisinage du fond, d'un courant d'eau atlantique. Plusieurs formes caractéristiques, entre autres des Crustacés décapodes, qui existent dans la Mer du Nord, manquent dans

(1) Dans ses « Plankton Studien » (1891), Hæckel a signalé les courants marins comme étant la plus importante de toutes les causes qui influent sur la répartition du Plankton ; il a rappelé à ce sujet les premières observations de Carpenter, Wyville-Thomson, J. Murray, C. Vogt, etc.

cette région circonscrite par un courant annulaire, sans qu'on puisse l'expliquer par une différence insignifiante de température et de profondeur. Appellöf a cherché à interpréter ce fait en faisant observer que les larves comme les adultes de ces formes qui, normalement, vivent dans les eaux de l'Atlantique, peuvent également pénétrer dans les eaux du courant, sans atteindre la région centrale que ce dernier enveloppe et dont les conditions physiques sont différentes. Quoi qu'il en soit, cet exemple montre l'influence que peuvent avoir les courants sur la répartition des espèces, à l'intérieur d'une mer limitée.

La Géologie et la Paléontologie ont tout à gagner aussi à une étude approfondie des courants : on sait combien on a eu souvent recours à l'hypothèse de courants chauds ou de courants froids pour expliquer certaines particularités de faunes fossiles qui paraissaient être des anomalies dans l'état actuel de nos connaissances.

II

La technique relative aux recherches d'océanographie physique s'est singulièrement perfectionnée depuis l'établissement du « Conseil permanent international pour l'exploration de la mer » et du « Laboratoire central international » à Christiania. Les recherches approfondies faites à ce point de vue ont conduit à systématiser les méthodes usitées maintenant de façon à répondre à tous les desiderata, en ce qui concerne la température, la salinité, les gaz dissous et la mesure des courants.

Pour l'étude des courants — qui domine tout — l'une des « stream-gauges » les plus employées est l' « Eckman's propeller current-meter » qui a été encore perfectionnée par l'illustre naturaliste explorateur Fridtjof Nansen, spécialisé aujourd'hui dans les travaux d'océanographie. Un grand avantage de cet appareil est qu'il donne des indications concernant à la fois la vitesse et la direction du courant. Des expériences précises de laboratoire permettent de déterminer préalablement la vitesse v du courant exprimée en centimètres par seconde et le nombre n enregistré automatiquement des révolutions du propulseur par minute. Cette relation est établie et vérifiée pour les vitesses comprises entre les deux limites extrêmes observées, l'une inférieure, l'autre supé-

rieure. L'instrument indique la direction du courant pour 50 révolutions du propulseur. (1)

Ces mesures de courant présentent d'ailleurs de très grandes difficultés. L'une des principales est d'obtenir un point fixe. Nansen et Eckman recommandent d'ancrer l'appareil et de le tenir flottant au moyen d'une bouée, l'ancre étant reliée au steamer. Mais on a remarqué que toute connexion directe entre le bateau et l'appareil imprime à ce dernier tant de secousses qu'on ne peut avoir aucune confiance dans les mesures. Bien des tentatives ont été faites avec le bateau à l'ancre; si les profondeurs sont faibles, l'ancrage peut se faire en avant et en arrière. Mais il n'en est plus ainsi, lorsque les profondeurs sont considérables. Avec une seule ancre, les oscillations du bateau peuvent devenir relativement trop grandes, pour que les mesures soient suffisamment précises, surtout lorsqu'il s'agit de faibles courants.

Une autre source de grosses difficultés réside dans l'influence encore très insuffisamment connue de la marée sur les courants. Comme l'a fait remarquer très judicieusement Fr. Nansen, des séries discontinues d'observations de courants prises à différentes stations sont de peu de valeur, parce qu'on ne peut apprécier actuellement la grandeur des variations diurnes dues à la marée; elles peuvent même conduire à des résultats tout à fait erronés sur la distribution horizontale et verticale des courants dans une certaine étendue de mer. Si, par exemple, à une station déterminée, on mesure les courants de surface au moment où ils atteignent leur minimum de vitesse, tandis que les courants de profondeur le seront quelques heures plus tard, quand ils approchent de leur maximum ou ont changé de direction, on se ferait une idée très inexacte de la distribution verticale des courants. Si, à une certaine station, les courants de profondeur sont mesu-

(1) Il existe plusieurs exellents modèles d'instruments mesureurs des courants. Celui de O. Pettersson, à suspension bifilaire, a été construit pour servir surtout à bord des bateaux-phares. R. J. Vitting en a imaginé un autre type avec enregistreur électrique. Il offre le grand avantage de permettre la lecture des vitesses et des directions continuellement sur le pont; mais comme il est aussi à suspension bifilaire, que le câble électrique auquel il est attaché à un diamètre de 9 millimètres, il ne peut être utilisé, comme le précédent, qu'à des profondeurs très modérées.

rés près de leur maximum, tandis qu'à une autre station, ils le sont à un autre moment du jour, près de leur minimum, lorsqu'ils ont changé de direction, on aurait un tableau erroné de leur distribution horizontale.

Il est donc nécessaire actuellement de faire des séries continues d'observations à différentes profondeurs, au moins durant 24 heures à chaque station, afin de déterminer les variations diurnes des courants durant le jour, à toutes les profondeurs, dans les diverses parties de la mer. Lorsque de telles séries continues d'observations auront été prises aux grandes marées, aux mortecau et aux différentes saisons, on pourra déterminer l'action de la marée et ensuite la direction principale actuelle, ainsi que la vitesse moyenne du courant durant chaque période diurne.

En portant les temps en abscisses et les vitesses en ordonnées, on obtient une représentation graphique des variations de la vitesse d'heure en heure. On peut de même tracer le graphique des variations de la direction dans l'intervalle d'un jour. Les courants constants en direction sont représentés par des lignes horizontales; les courants de marée, en haute mer, sont caractérisés par des changements constants de direction.

III

En mai et en juin 1904, B. Helland Hansen entreprit une série de mesures de courants faites aussi rigoureusement que possible, non seulement dans la mer du Nord (1), mais aussi dans les fjords; des travaux du même ordre ont été exécutés dans les fjords en 1906. Depuis, des observations nombreuses ont été recueillies et étudiées par le Professeur Grund.

Helland-Hansen a étudié au point de vue océanographique la partie supérieure du Hjörund-fjord et la partie moyenne du Sulefjord (ces deux fjords sont situés au nord du 62e degré, un peu au sud d'Aalesund). Dans le dernier, il constata qu'à la profondeur de 50 mètres, dans les mouvements dus à la marée, la vites-

(1) Dans les cartes allemandes, on distingue : 1° la *Nordsee*, comprise entre la Grande Bretagne, la Belgique, la Hollande, l'Allemagne, le Danemark et le sud de la Norvège; 2° la *Nordmeer*, située au nord des Färö et des Shetland, entre l'Indesla, la Norvège, au sud de l'Océan glacial artique.

se présente un minimum et il est digne de remarquer que le minimum de température a constamment été trouvé dans les fjords norvégiens en été, à une profondeur comprise entre 20 et 50 mètres. A 100 mètres et à 300 mètres de la surface, les mouvements, sans être rapides, étaient certainement plus forts qu'à 50 mètres. L'eau du fond du fjord était certainement d'origine atlantique, avec une salinité dépassant 35 pour 1000.

Les recherches du « Michaël Sars » dans l'été de 1905, ont montré une différence fondamentale dans la configuration entre le Hjorundfjord et la plupart des fjords de la Norvège occidentale, du sol et une différence physique des couches les plus profondes en rapport avec la précédente. Tandis que l'accès libre de l'eau de l'Atlantique est empêchée par un ou plusieurs seuils, pendant la plus grande partie de l'année, dans les fjords du Westland en général et dans leur partie profonde spécialement, cette eau pénètre avec la plus grande facilité en tout temps jusqu'au fond du Hjörundfjord. Il résulte de là, entre les deux catégories de fjords, des différences d'ordre physique qui retentissent sur leur faune. Ainsi, par exemple, le *Pandalus leptoceros* Smith var. *Bonnieri* Caull. a été recueilli en abondance par Appellöf sur le plateau septentrional de la mer du Nord et dans le Hjörundfjord, mais non dans les autres fjords; en revanche, dans ceux-ci, vit le *Pandalus borealis Kr.*, qu'on ne retrouve pas avec le précédent, ni dans la mer du Nord, ni dans le Hjörundfjord. Il semble que les deux espèces doivent, dans la règle, vivre dans des conditions physiques différentes, bien qu'on les trouve dans les mêmes régions marines.

Des mesures, sur le plateau continental, sur la côte du Söndmöre et au voisinage du talus continental, ont été également faites par B. Helland-Hansen. L'éminent océanographe reconnut l'existence de deux courants sur le banc: un dans les 20 mètres supérieurs, venant de la terre ferme, l'autre, plus profond, se dirigeant vers celle-ci. Dans le courant de surface, il y avait un fort maximum de vitesse, le matin du 7 juillet, de bonne heure; dans celui de fond, il y avait un maximum également marqué 6 ou 7 heures plus tard. Au voisinage de la surface, on observait des fluctuations considérables qui, parfois, prenaient le caractère d'un courant de marée.

Le long du talus continental, il nota, à 75 mètres de profondeur, l'indication d'un minimum de température qui, comme dans les fjords, coïncide avec un minimum de vitesse. A une profondeur plus grande, la vitesse croît ; elle présente une moyenne maxima à 200 mètres environ, soit 15 centimètres par seconde. La vitesse moyenne n'était pas très élevée au fond ; cependant elle devenait assez grande à de certains moments ; en un cas, on a mesuré plus de 21 centimètres par seconde. Cette vitesse était suffisante pour balayer sur le fond toutes les petites particules comme les grains de sable ; le fond se montrait en effet formé par le roc solide.

Des séries d'observations montrèrent que le courant à la surface est moindre qu'à quelques centimètres au-dessous de celle-ci ; le maximum se trouve réalisé à 5 mètres environ de la surface avec une vitesse de 26 centimètres à la seconde.

Lorsqu'il étudiait le Gulf Stream dans le détroit de Floride, J.-E. Pillsbury montra qu'il y a une période journalière en ce qui concerne les vitesses. Il paraît en être de même sur le bord du plateau continental, d'après les mesures de Helland-Hansen, au moins jusqu'à 100 mètres de profondeur. Dans les couches plus profondes, de 100 à 200 mètres, la période, d'après le même océanographe, serait deux fois aussi grande, c'est-à-dire qu'il y aurait un intervalle de 24 heures environ entre le maximum et le minimum suivant. Mais de nouvelles recherches sont nécessaires pour élucider ce point. Dans la branche européenne du Gulf Stream, de pareilles mesures directes n'ont jamais été faites précédemment.

Dans la mer du Nord, Helland-Hansen fit des mesures sur le Ling Bank, à Wester Holla et au Great Fisher Bank.

A la première station, l'océanographe norvégien observa un courant de marée typique ; les courbes de vitesse montrent, en effet, une course presque idéale, avec maxima et minima alternatifs bien définis ; un maximum et le minimum suivant étant séparés par un intervalle de 6 heures environ.

Wester Holla est aussi une région typique de courants de marée, avec des conditions beaucoup plus compliquées qu'au Ling-Bank. Dans les 20 mètres à partir de la surface, l'eau a une

faible salinité, à cause de l'apport d'eau douce des côtes voisines; de 25 à 75 mètres, est une couche mixte, avec une salinité comprise entre 34 et 35 pour 1000; au-dessous de 100 mètres, c'est l'eau salée de l'Atlantique.

Sur le Great Fisher Bank, Helland-Hansen nota encore l'existence d'un courant de marée typique. A deux mètres de profondeur, la vitesse était d'environ 42 centimètres par seconde; entre 2 et 5 mètres, la vitesse était beaucoup plus grande et le courant résultant avait une tendance à aller vers l'est.

Le Dr Damas, collaborateur de B. Helland-Hansen, fit, les 30 et 31 juillet, des mesures pendant 22 heures consécutives à Hirtshall's Light, sur le côté danois du Skagerack. Dans les couches supérieures, jusqu'à 20-30 mètres, Damas constata l'existence d'un courant à direction constante, mais l'absence de tout courant de marée. A 2 mètres, le courant avait une vitesse de 45 centimètres par seconde et la direction était S. 14° W (vraie). Dans les couches profondes, le courant allait plutôt vers l'est et suivait la côte danoise; les vitesses étaient considérables jusqu'à une profondeur de 15-20 mètres. Au-dessous de 20 mètres, la vitesse décroissait rapidement et à 75-90 mètres, les expérimentateurs étaient incapables de définir le courant. Ces résultats sont en relation directe avec les conditions de salinité: l'eau atlantique avec plus de 35 pour 1000 de salinité fut trouvée à une profondeur d'environ 50 mètres, tandis que les couches superficielles étaient fortement additionnées d'eau douce provenant des terres voisines; de 20 à 50 mètres, c'était l'eau de la mer du Nord avec une salinité comprise entre 34 et 35 pour 1000.

Au large de Jœderen, près de la terre ferme, B. Helland Hansen constata que, dans les couches supérieures, jusqu'à 100 mètres environ, il y avait un courant assez fort allant du sud au nord et un courant faible près du fond, allant dans une direction opposée.

IV

Les observations faites jusqu'ici, malgré leur nombre relativement restreint, montrent, d'après Helland-Hansen, qu'il est possible d'étudier avec une précision satisfaisante le «dynamical Phenomena of the Sea», même là où la profondeur est considérable.

Les stations étudiées par Helland-Hansen appartiennent à plusieurs groupes: quelques-unes d'entre elles sont situées dans des aires où les courants réguliers de marée prédominent complètement, c'est le cas en particulier du Ling Bank; dans quelques autres, les courants de marée sont de très faible importance comparativement aux autres mouvements, par exemple dans les couches supérieures des stations étudiées dans le Skagerack. Les variations trouvées dans la mer norvégienne ne montrent pas le type régulier semi-diurne des marées; il est difficile actuellement de dire si ces variations sont dues à une période diurne des marées ou si elles n'ont aucune connexion avec ce phénomène. Entre ces deux groupes, il existe, et on a constaté, plusieurs formes de transition.

Même dans les aires où le courant est à peine perceptible, il est encore possible de tracer et de suivre la direction de la masse tout entière de l'eau. Les courants de marée, dans les couches profondes, peuvent être déterminés, même lorsqu'ils sont très faibles.

Dans beaucoup de cas, la direction et la force des courants changent à de très courtes périodes et une simple observation à un moment donné ne suffit pas pour donner une idée claire de leur direction générale et de leur vitesse moyenne. L'étude générale de ces mouvements de tourbillon et des phénomènes du même ordre sera entreprise, il faut l'espérer, dans un avenir prochain. Il semble que l'océanographie entre dans une nouvelle phase, grâce aux perfectionnements récemment réalisés dans la technique des recherches.

Les puissances riveraines de la mer du Nord (1) ont fondé en 1902 un comité international de recherches océanographiques; un Laboratoire central fut établi à Christiania. La France est restée en dehors de ce groupement scientifique. Aussi, n'y a-t-il pas lieu de s'étonner qu'au point de vue océanographique, les côtes

(1) Grâce aux recherches faites de toutes parts, la circulation des eaux à l'intérieur de la mer du Nord est aujourd'hui bien connue dans ses traits généraux qui ont été résumés récemment par M. Martin Knudsen, à qui on doit tant de travaux d'océanographie (Martin Knudsen, Some Remarks about the Currents in the North sea and adjacent Waters, *Publications de circonstances* n° 39, 1907, *Conseil permanent international pour l'exploration de la mer*).

françaises comptent parmi les plus mal connues de l'Europe occidentale. Les rares données que nous possédons à ce sujet, ont été recueillies en grande partie au cours des croisières déjà anciennes du Prince de Monaco et de celles de la Société océanographique du golfe de Gascogne.

Dans ces études de l'Océan, la Norvège (1), dont la côte est si profondément découpée, s'est fait une place à part. Le « Michaël Sars », admirablement construit et aménagé pour toutes les recherches relatives aux pêcheries, le mieux outillé des navires de ce genre, peut-être, qui soit au monde actuellement, avec son vaste assortiment de chaluts à mailles fines et de filets pélagiques, a permis au Dr Damas de recueillir un ensemble imposant de faits relatifs à la biologie des poissons; grâce à son outillage scientifique si complet, le Dr Helland Hansen a pu rassembler un faisceau de documents concernant l'océanographie des côtes scandinaves, des fjords et de la mer du Nord. Les recherches d'ordre purement technique et celles de caractère pratique sont ici étroitement associées; tout en faisant des mesures précises de vitesse et de direction des courants, on a découvert au cours d'une des croisières récentes du «Michael Sars» un véritable banc d'Halibuts qui alimente en partie le marché de poissons de Bergen, dont l'importance considérable est bien connue.

Les naturalistes de Bergen, où travaillent ces deux océanographes, ont organisé depuis plusieurs années, en août et en septembre, des cours de « Meeresforschung » spécialement appliqués à l'océan norvégien qu'ils connaissent si bien, pour l'avoir exploré eux-mêmes depuis de longues années. Cet enseignement est donné par: M M. le Dr Appellof, dont le domaine est l'océanographie biologique et qui insiste particulièrement dans ses conférences sur l'importance de l'étude des conditions géographiques et physiques de l'habitat pour les zoologistes; le Dr Helland-Hansen qui traite les questions d'océanographie physique; le Dr Damas qui s'occupe spécialement du Plankton animal et, en même temps, des questions de pêcheries; le Dr Jorgensen qui

(1) Les naturalistes scandinaves (P. T. Clève, Hjort, Gran, etc.) ont, avec l'école de Hensen, à Kiel, fourni une large contribution à l'étude du Planktou en général.

expose la composition du Plankton végétal: enfin, le Dr Kolderup qui complète cet ensemble d'une façon très heureuse, car il retrace les principales étapes de la formation des fjords en s'attachant particulièrement à l'histoire des périodes glaciaire et postglaciaire. Des excursions méthodiquement organisées, dirigées par le Dr Appellöf, assisté du Dr J. Grieg, permettent d'explorer le district de Bergen depuis la poussière d'écueils (Skjærgaard) du littoral jusqu'à l'intérieur des fjords.

Ces cours sont faits en anglais ou en allemand, le plus généralement en cette dernière langue, à cause de la prédominance de l'élément allemand dans l'auditoire(1). Ils sont fort instructifs parce qu'ils sont faits par des naturalistes très compétents qui fondent leur enseignement sur leurs travaux personnels.

Pour être admis à suivre les cours de «Meeresforschung», il faut verser au préalable la somme de 150 couronnes scandinaves (210 francs environ). Aucune autre condition n'est exigée des auditeurs. Chaque semaine, un jour entier est consacré à une excursion en mer. A cause de la faible amplitude des marées et de la nature des côtes dans ces régions du nord de l'Europe, le champ d'exploration, à mer basse, est assez restreint. Les zoologistes de Bergen y suppléent par l'emploi d'une série d'instruments spéciaux, à long manche, qui leur permettent de râcler la surface des rochers, d'en détacher les Algues et surtout les Laminaires et de ramener ainsi à la surface une foule d'organismes. Les Polypes hydraires semblent être ici dans leur milieu optimum. Dans les fissures des rochers, il n'est pas rare d'observer de magnifiques exemplaires géants de *Tubularia indivisa L.* couvrant des surfaces de plusieurs mètres carrés; les larges frondes de *Laminaria hyperborea* sont fréquemment revêtues dans toute leur étendue de colonies de Campanulaires. Des dragages nombreux pratiqués dans les conditions les plus variées, au point de vue de la profondeur, de la nature du fond, de la force et de la direction des courants, etc. procurent d'abondants maté-

(1) Parmi les auditeurs des cours de «Meeresforschung» de Bergen, en 1908, on comptait: 7 Allemands, 1 Anglaise, 5 Autrichiens, 1 Français, 1 Japonais, 2 Norvégiens et 1 Suisse, soit en tout 18 auditeurs; il ne paraît guère possible, en l'état actuel des choses, d'en admettre un plus grand nombre.

riaux d'étude pour les jours suivants. Le lendemain de l'excursion, le Dr Appellof dresse l'inventaire de la récolte et fait connaître très exactement les caractéristiques physiques et biologiques des régions visitées. Outre les sorties en mer réservées aux opérations d'océanographie physique, on fait encore, de temps en temps, des pêches planktoniques dans les fjords et leurs dépendances qui pénètrent si profondément à l'intérieur de la Norvège.

En dehors des matériaux provenant des excursions en mer, les auditeurs peuvent utiliser un grand nombre de spécimens du Muséum de Bergen, si riche en formes boréales; des tables de détermination très claires leur permettent de trouver eux-mêmes assez aisément les noms des organismes qu'ils étudient; de plus, les principaux ouvrages se rapportant à la faune et à la flore marine arctiques sont mis constamment à leur entière disposition. Le plus grand libéralisme règne ici; chacun se spécialise à son gré. On peut même se constituer une collection en conservant les exemplaires recueillis aux diverses stations explorées. L'auteur de ces lignes a pu ainsi rapporter de nombreux spécimens de la riche faune norvégienne, dont beaucoup d'espèces, surtout celles de faibles dimensions, n'étaient pas représentées dans les collections du Muséum d'histoire naturelle.

Les conférences ont lieu tous les jours, en dehors du temps réservé aux excursions. Le Laboratoire est ouvert aux travailleurs de 9 heures du matin à 7 heures du soir. La meilleure confraternité scientifique est la règle dans ce milieu cosmopolite; tout le monde se livre, avec ardeur et avec joie, à ces études océanographiques poursuivies avec une persévérance exemplaire dans les pays scandinaves.

Il est à souhaiter, au moment où cet ordre de recherches est si en honneur partout à l'étranger, que la France ne demeure pas plus longtemps indifférente à des études qui ouvrent de nouvelles voies aux biologistes et qui peuvent rendre des services non seulement à la science pure, mais aussi aux pêcheries. En tout cas, comme l'a dit Cligny dans un article très documenté sur les rapports entre l'océanographie et les pêches maritimes (1) «dans le

(1) A. Cligny, L'Océanographie et les pêches maritimes, *Revue du Mois*, T. II, 1906 p. 208-230.

champ fertile de la mer, on ne fouillera pas sans profit ».

Indépendamment de l'Institut de Kiel et de la station biologique d'Helgoland spécialement affectée à l'étude des pêcheries, l'Allemagne vient de fonder à Berlin un nouvel « Institut für Meereskunde » annexé à l'Université, avec un enseignement complet de l'océanographie. Des exercices pratiques doivent être faits chaque année sur mer, pour familiariser les étudiants avec le maniement des appareils employés dans les recherches océanographiques.

Avec son service scientifique des pêches aujourd'hui complètement organisé, avec son cadre de jeunes naturalistes habiles et dévoués, versés dans les questions de biologie marine, la France peut et doit se mettre à la hauteur des autres nations pour l'exploration technique de l'Océan.

Note Complémentaire sur une seconde Collection de Poissons

recueillie par M. E. Haug, à Ngomo (Ogôoué)

Par M. le Dr Jacques PELLEGRIN

Un petit envoi tardif provenant de récoltes faites par M. le pasteur Ernest Haug aux environs de Ngomo (Ogôoué) et complétant la collection de Poissons dont j'ai donné la liste dans un précédent Bulletin de la Société (1) ne peut être passé sous silence. Sur 16 espèces, en effet, il en contient 9, non encore recueillies par ce zéle correspondant du Muséum dont deux nouvelles pour la science de la famille des Siluridés, un *Amphilius*, et un *Auchenoglanis*.

Je reproduirai comme dans mes mémoires précédents les indications fournies par M. E. Haug, ainsi que les désignations locales dans les trois dialectes *galwa* (g.), *nkomi* (nk.) et *pahouin* (p.) (2).

Lepidosirenidæ

1. Protopterus Dolloi Boulenger.

Un exemplaire. Jeune de 310 millimètres de longueur.
Noms locaux : enyingui (g.), emvounga (p.).

Ce spécimen encore jeune est marqué de nombreux petits points noirs.

Beaucoup d'auteurs ont considéré comme ne formant qu'une seule espèce tous les Protoptères africains. M. Boulenger ne partage pas cette manière de voir et a séparé cette espèce du Congo et de l'Ogôoué des deux autres plus anciennement connues le *Protopterus annectens* Owen et le *P. æthiopicus* Heckel.

---

(1) Dr J. Pellegrin. Sur une seconde collection de Poissons recueillie par M. Haug, à Ngomo (Ogôoué). *Bull. Soc. Philom.* (9) XI, 1908, p. 184.

(2) Les espèces figurant dans les deux précédents envois sont précédées du signe *.

Mormyridæ

* 2. Mormyrops zanclirostris Günther.

Deux exemplaires. Nom local : ndongue lole (p.).

Characinidæ

3. Brycon æthiops microstoma Günther, var. Mocquardiana Thominot.

Un exemplaire. Nom local : ekira (p.).
« Dans les rapides à la ligne. »

L'individu adulte envoyé par M. Haug a les ventrales et l'anale orangées. La dorsale et la caudale sont également plus ou moins marquées d'orangé.

Cette espèce présente plusieurs variétés de coloration. Elle habite la Cameroun, l'Ogôoué et le bassin du Congo jusque dans le haut fleuve.

* 4. Nannocharax parvus Pellegrin.

Un exemplaire. Longueur 39 + 9 = 48 millimètres.

La base de la dorsale, de l'anale et de la caudale est marquée d'orangé.

Cyprinidæ

5. Labeo annectens Boulenger.

Cinq exemplaires. Grand spécimen : longueur 152 + 40 = 192 mm. sans tubercules nuptiaux accentués. Nom local : nlôle (p.).

Petits spécimens de 100 + 27 = 127 à 122 + 30 = 152 millimètres, à tubercules nuptiaux développés. Noms locaux : emvougha (p.), mbôka (g.).

« Dans les rapides et ruisseaux rocheux. Pris à la ligne et au panier. »

Cette espèce a été décrite en 1903 par M. G. A. Boulenger (1), d'après deux spécimens récoltés par M. G. L. Bates, dans le Rio-Campo (Cameroun).

6. Barbus Batesi Boulenger.

Deux exemplaires : Longueur 210 + 60 = 270 mm. et 105 + 30 = 135 mm. Noms locaux : emvougha (p.), mbôka (g.).

« Atteint 80 centimètres, rencontré seulement dans les cours d'eau à allure torrentielle. »

---

(1) *Pr. Zool. Soc. Lond.*, 1903, p. 23., pl. II, fig. 1.

La coloration du petit spécimen est bleu ardoisé sur le dos, gris argenté sur les côtés, elle est beaucoup plus vive sur le grand individu où les flancs sont agréablement marqués de rose et d'orangé. La base des nageoires paires, de la dorsale et de l'anale est orangée, l'extrémité des rayons plus ou moins grisâtre ou noirâtre.

Ce Barbeau qui d'après M. Haug atteindrait d'assez grandes dimensions et qui est remarquable par son rayon osseux non denticulé à la dorsale, a été décrit en même temps que l'espèce précédente d'après un seul spécimen de 235 millimètres de la rivière Kribi.

7. Barbus trispilomimus Boulenger.

Quatre exemplaires : Longueur 43 + 11 = 54, 41 + 12 = 53, 38 + 12 = 50, 36 + 10 = 46 millimètres.

« Ngomo, fin-octobre. Remontant le courant dans un banc de *Pellonula*. Inconnu des indigènes. »

Cette espèce décrite tout récemment par M. Boulenger (1), n'est connue que par un seul spécimen de 35 millimètres, de provenance non indiquée (probablement Congo ?). L'envoi de M. Haug permet donc de fixer la patrie de ce curieux petit Poisson qui appartient au groupe paradoxal des Barbeaux sans barbillons, et dont la livrée rappelle étrangement celle du *Barbus trispilus* Bleeker.

Siluridæ

8. Amphilius nigricaudatus nov. sp.

La hauteur du corps est comprise 6 fois à 6 fois 1/2 dans la longueur, la longueur de la tête 3 fois 3/4. La tête est très déprimée, un peu plus longue que large. Le museau arrondi est contenu 2 fois 1/2 dans la longueur de la tête. L'œil est petit, compris 2 fois environ dans la largeur interorbitaire, 3 fois dans la longueur du museau. Le barbillon maxillaire plus long que la tête, atteint le milieu de la pectorale ; le mandibulaire externe s'étend presqu'aussi loin : le mandibulaire interne fait environ la moitié de la longueur de la tête. La dorsale composée d'un rayon simple flexible et de 6 rayons branchus est située un peu

(1) *Ann. Mag. Nat. Hist.* (7) XX. Octobre 1907, p. 337.

plus près du museau que de la base de la caudale. L'adipeuse 2 fois aussi longue environ que la dorsale rayonnée est séparée de celle-ci par un espace égalant 1 fois 1/2 la longueur de la base de cette dernière. L'anale comprend 2 rayons simples et 5 branchus. La pectorale un peu plus longue que la ventrale fait les 2/3 ou les 3/4 de la longueur de la tête. La ventrale commence sous l'aplomb du dernier ou de l'avant-dernier rayon de la dorsale. Le pédicule caudal est environ aussi haut que long. La caudale est faiblement émarginée.

La teinte générale du corps est chocolat tantôt uniforme (3 spécimens), tantôt marquée de nombreuses petites taches noires (1 spécimen, var. *multipunctata* var. nov.) (fig. 2). Le ventre est jaunâtre, les nageoires grisâtres. La caudale blanche à la base et à la pointe des lobes est presqu'entièrement couverte par une vaste maculature noire.

D. I, 6 ; A. II, 5 ; P. I, 8 ; V. I, 5.

N° 09-13 à 16. Coll. Mus. — Ngomo (Ogôoué) : Haug.
Longueur : 59 + 11 = 70, 57 + 12 = 69, 57 + 11 = 68, 56 + 11 = 67 millim.

Cette petite espèce est très voisine de l'*Amphilius brevis* Boulenger (1), de la rivière Lindi, affluent du Congo. Elle semble cependant pouvoir en être séparée à cause de sa dorsale placée un peu moins en arrière et de ses barbillons sensiblement plus longs.

D'après M. Haug, ces exemplaires sont adultes. On les rencontre sous les rochers et cailloux des ruisseaux de montagnes. Ils portent en pahouin le nom de ngole mekokh.

Deux des spécimens, l'un à coloration uniforme, l'autre appartenant à la variété multiponctuée sont des femelles à cavité abdominale remplie d'œufs mûrs très développés. Le diamètre de ceux-ci atteint souvent 2 millimètres.

Un troisième individu est encore une femelle, mais ses œufs sont à un degré de développement beaucoup moins avancé.

9. Auchenoglanis macrostoma nov. sp.

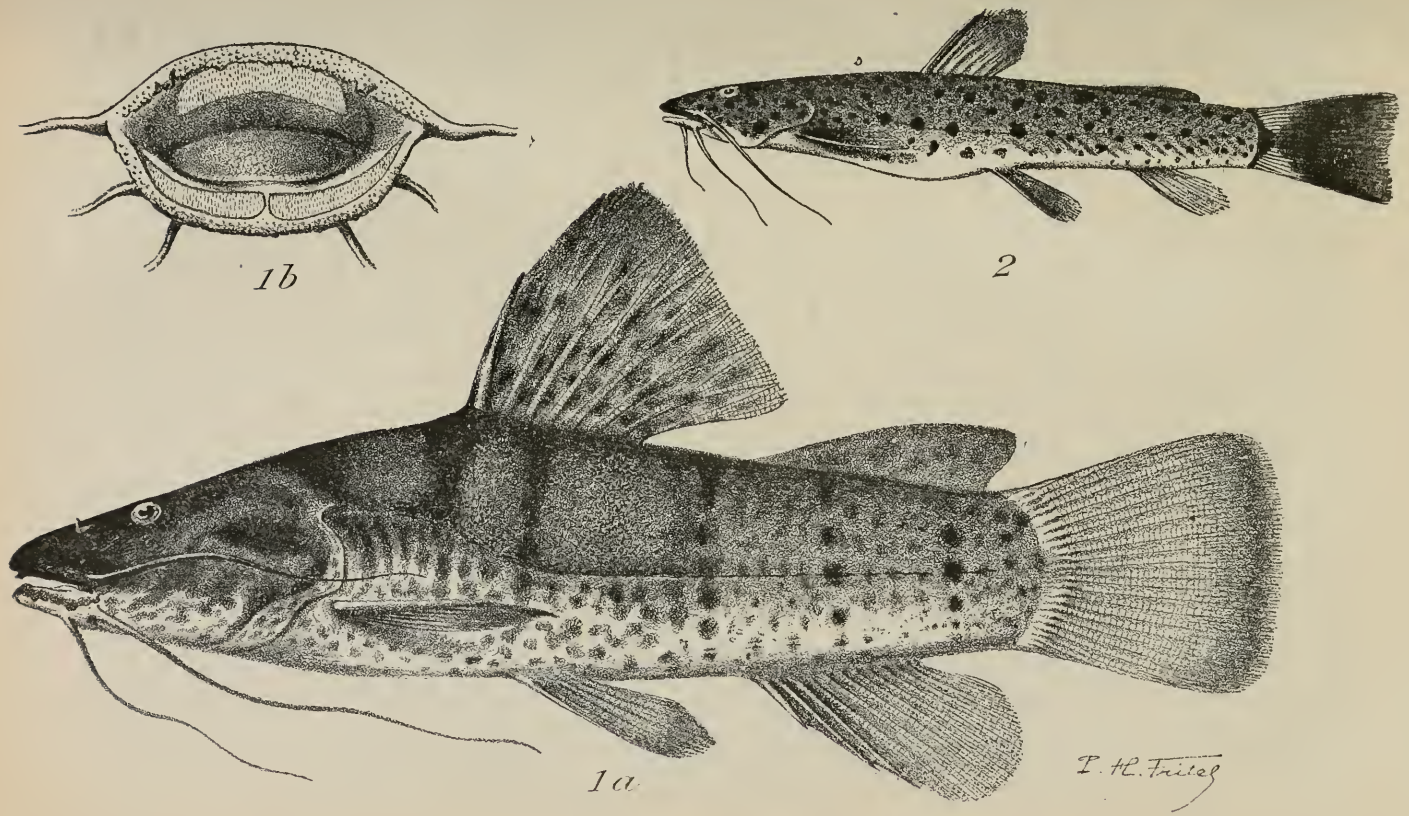
(Fig. 1 a)

La hauteur du corps est contenue 4 fois 1/2 dans la longueur,

(1) *Pr. Zool. Soc. Lond.*, 1902, p. 268, pl. XXIX, fig. 3.

sans la caudale, la longueur de la tête 3 fois 1/3. La tête est nue, lisse, couverte d'une peau mince, un peu plus longue que large. Le processus occipital est petit. Le museau est nettement arrondi, contenu 1 fois 1/3 dans l'espace interorbitaire. La narine postérieure largement fendue est plus rapprochée de l'œil que de l'extrémité du museau, l'antérieure tubuleuse est placée sur la lèvre. Les yeux sont petits, dirigés en haut, situés un peu plus près du bout du museau que de la fin de l'opercule ; leur diamètre est contenu 3 fois environ dans l'espace interorbitaire, 9 fois dans la longueur de la tête. La largeur de la bouche fait les 2/3 de celle de la tête. Les lèvres sont épaisses, papilleuses. A la mâchoire supérieure existe une vaste bande semi-lunaire de dents villiformes, dont la largeur transversale égale la longueur du museau et la hauteur sur la ligne médiane le 1/3 de l'espace interorbitaire. A la mandibule les dents également villiformes constituent de chaque côté deux bandes très allongées s'étendant en arrière jusqu'au niveau des commissures labiales et presqu'en contact antérieurement (fig. 1 *b*). Le barbillon maxillaire atteint le milieu de la pectorale ; le mandibulaire externe l'extrémité de cette nageoire ; le mandibulaire interne fait près des 4/5 de la longueur de la tête. Le prolongement huméral est petit, pointu. La nageoire dorsale se compose d'une courte, mais forte épine lisse contenue 2 fois 1/2 dans la longueur de la tête et de 7 rayons branchus dont les premiers font les 3/4 de la longueur de la tête. L'adipeuse 4 fois aussi longue que haute est séparée de la dorsale par un espace égal aux 2/3 de la longueur de celle-ci. L'anale comprend 12 rayons dont 9 branchus. L'épine de la pectorale plus forte et plus longue que celle de la dorsale, a le bord antérieur lisse et le bord postérieur armé d'une dizaine de dents ; la nageoire n'atteint pas la ventrale qui s'insère sous le début du 1/3 postérieur de la dorsale et n'arrive pas à l'anale. Le pédicule caudal est notablement plus haut que long ; la caudale arrondie.

La teinte générale est chocolat, avec le ventre jaunâtre et le dessous de la tête grisâtre. Les nageoires paires, la dorsale et l'anale sont marquées de petites taches noires. Il en existe également plus ou moins irrégulièrement disposées sur le bas des flancs et sur le dessous du corps. On voit en outre, sur



1 *a* *Auchenoglanis macrostoma* nov. sp. : 1 *b* sa bouche ouverte. — 2 *Amphilius nigricaudatus* nov. sp. var. *multipunctata* var. nov.

les côtés 5 lignes transversales, régulières, formées de petites taches noires plus ou moins confondues (fig. 1 *a*).

D. I, 7 ; A. III, 12 ; P. I, 8 ; V. I, 5.

N° 09-17. Coll. Mus. — Ngomo (Ogôoué) : Haug.
Longueur : 192 + 50 = 242 millimètres.

Ce Poisson au museau arrondi et à la dentition particulière ne peut être rapproché que de l'*Auchenoglanis guttatus* Lönnberg (1), du Cameroun et de la rivière Lukula. Il s'en sépare entre autres caractères par ses barbillons plus longs.

Cette espèce, d'après M. Haug, atteindrait 40 à 50 centimètres. Elle se rencontre dans les endroits rocheux et porte le nom pahouin de Ebvoul.

10. Microsynodontis Batesi Boulenger.

Trois exemplaires. Longueur 36 + 8 = 44, 34 + 8 = 42, 27 + 7 = 34 mm.
Nom local : angbwang (p.).
« Exemplaires adultes, sous les feuilles mortes, au bord des ruisseaux des montagnes. Piqûre très douloureuse. »

Cet intéressant petit Poisson, type d'un genre nouveau, fut signalé pour la première fois en 1903 par M. Boulenger (2), d'après des exemplaires de 100 millimètres de la rivière Mvile au Cameroun.

Murænidæ.

11. Ophichthys (Spiagebranchus) Buettikoferi Steindachner.

Quatre exemplaires : longueur 539, 460, 408, 455 millimètres.
Noms locaux : ogongo (g.), mfou (p.).

Cette espèce a été décrite par M. Steindachner (3), d'après 6 exemplaires de 185 à 272 millimètres, provenant des ruisseaux montagneux de Hill-Town (Libéria). Il est fort intéressant de retrouver ce Poisson dans l'Ogôoué. Les *Ophichthys* toutefois étant plutôt marins, ce fait explique peut-être l'extension de cette

(1) *Ofver. K. Vet. Ak. Forh.* Stockholm, 1895, p. 184.

(2) *Proc. Zool. Soc. Lond.*, 1903, p. 26, pl. IV.

(3) *Notes Leyden Mus.*, XVI, 1895, p. 88.

distribution géographique. L'espèce, néanmoins, n'a été rencontrée jusqu'ici que dans les eaux douces.

Ophiocephalidæ

* 12. Ophiocephalus obscurus Günther.

Deux exemplaires.

Anabantidæ.

* 13. Anabas nigropannosus Reichenow.

Un exemplaire. Nom local : amokh (p.).

Nandidæ

* 14. Polycentropsis abbreviata Boulenger.

Trois exemplaires. Longueur 54 + 11 = 65, 54 + 6 (caudale mutilée) = 60, 49 + 10 = 59 millimètres.

Les indigènes distinguent sous le nom d'etoune nzine (p.), ces exemplaires de ceux du précédent envoi ; ils n'en sont pourtant pas séparables spécifiquement.

Cichlidæ.

* 15. Pelmatochromis nigrofasciatus Pellegrin.

Un exemplaire. Longueur 98 + 30 = 128 mm.
Nom local : engoul (p.). « Pris sous les pierres. »

La livrée de ce spécimen est remarquablement claire et les fasciatures noires qui m'ont servi jadis pour mon épithète spécifique, quoique visibles encore sont bien moins apparentes que sur les types.

16. Pelmatochromis Guentheri Sauvage.

Deux exemplaires. Longueur 91 + 24 = 115 et 87 + 21 = 108 mm.
« Avec alevins. Mi-octobre. »

Les deux spécimens sont des femelles. Chez l'une d'elles à ovaires gonflés d'œufs mûrs, la gueule est restée distendue par les alevins qu'elle contenait. Ceux-ci sont au nombre de 7, complètement débarrassés de leur vésicule et atteignent déjà la longueur respectable de 15 millimètres. Il est intéressant de constater

que comme je l'ai déjà montré (1), chez un autre Poisson de la famille le *Tilapia galilæa* Artedi, lorsque les alevins déjà complètement élevés sont prêts à s'échapper, une nouvelle ponte est sur le point de se produire.

En outre, l'incubation buccale déjà signalée dans le genre *Pelmatochromis* ne l'avait pas encore été chez le *Pelmatochromis Guentheri* Sauvage (2).

---

(1) Dr J. Pellegrin. L'incubation bucale chez le *Tilapia galilæa* Artedi. C. R. 6e Congr. Zool. Berne, 1904, p. 332.

(2) A cette liste de Poissons doit être joint un curieux Reptile fouisseur de la famille des Amphisbænidæ que je rapporte au *Monopeltis Dumerili* Strauch, var. *unirostralis* Mocquard. La longueur du spécimen envoyé par M. Haug est de 435 millimètres.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

DIXIÈME SÉRIE. — TOME I

1909

PARIS
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS
A LA SORBONNE

1909

Membres du Conseil

pour les années 1909, 1910 *et* 1911

MM.

André, 70 *bis*, rue Bonaparte.

D. Berthelot, 21, rue de Tournon.

Dongier, 87 *bis*, Grande-Rue, Bourg-la-Reine.

Grévy, 62, rue Saint-Placide.

Henneguy, 9, rue Thénard.

Laisant, 162, avenue Victor-Hugo.

Lévy (Lucien), 12, rue du Regard.

Vaillant, 36, rue Geof.-St.-Hilaire.

Membres du Bureau

pour 1909

Président : M. Perrin, 61, rue de Vaugirard.

Vice-Président : M. C. Matignon, 17, B[d] Carnot, Bourg-la-Reine.

Trésorier : M. Rabaud, 3, rue Vauquelin.

Secrétaire des Séances : M. Winter, 44, rue Saint-Placide.

Vice-Secrétaire des Séances : M. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.

Secrétaire du Bulletin : M. Coutière, 12, rue Notre-Dame-des-Champs.

Vice-Secrétaire du Bulletin : M. Neuville, 55, rue de Buffon.

Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

ABRÉVIATIONS

A. M.	Assistant au Muséum.
E. E. P.	Examinateur à l'Ecole Polytechnique.
I. P. C.	Ingénieur des Ponts et Chaussées.
I. G. M.	Inspecteur général des Mines.
I. G. A.	— — de l'Agriculture.
M. A. M.	Membre de l'Académie de Médecine.
M. I.	— de l'Institut.
M. C.	Maître de conférences.
P. C. F.	Professeur au Collège de France.
P. A. M.	— au Conservatoire des Arts et Métiers.
P. E. N.	— à l'Ecole normale supérieure.
P. E. M.	— — des Mines.
P. E. P.	— — Polytechnique.
P. P. C.	— — des Ponts et Chaussées.
P. E. Ph.	— — Supérieure de Pharmacie.
P. F. M.	— à la Faculté de Médecine.
P. F. S.	— — des Sciences.
P. M.	— au Muséum.
P. H.	Professeur honoraire.

ÉTUDE ET AMITIÉ

LISTE DES MEMBRES

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

Fondée en 1788

État de la Société en Mai 1909

PREMIÈRE SECTION.— SCIENCES MATHÉMATIQUES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1859 (12 fév.). Lévy (Maurice), M. I., P. C. F., 15, avenue du Trocadéro.
1860 (2 juin). Haton de La Goupilliere (J.-Napoléon), M. I., 56, rue de Vaugirard.
1861 (13 avril). Tissot (Nic.-Aug.), E. E. P., à Voreppe (Isère).
1863 (28 mars). Rouché (Eugène), M. I., 213, boulevard Saint-Germain.
1871 (23 déc.). Collignon (Édouard), 6, rue de Seine.
— *id.* Darboux (Gaston), M. I. (Secrétaire perpétuel), Doyen Hon. F. S., 36, rue Gay-Lussac.
1872 (27 janv.). Jordan (Camille), M. I., P. E. P., P. C. F., 48, rue de Varennes.
1875 (26 juin). Fouret (Georges), E.E.P., 4, avenue Carnot.
1876 (23 déc.). Picquet (Henri), E. E. P., 4, rue Monsieur-le-Prince.
— *id.* André (Désiré), P. H., 70 *bis*, rue Bonaparte
1878 (26 janv.). Leauté, M. I., 20, boulevard de Courcelles.
— (9 fév.). Laisant, E. E. P., 162, avenue Victor-Hugo.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1878 (9 fév.). Tannery, Dir. des Sc. E. N., 45, rue d'Ulm.
1881 (11 fév.). C. de Polignac, Radmannsdorf, Carniole (Autriche).
— *id.* Humbert (Georges), M. I., 10, rue d'Aubigny.
— (12 nov.). Chemin, P. P. C., 33, avenue Montaigne.
1884 (3 nov.). Lévy (Lucien), E. E. P., 12, rue du Regard.
1887 (17 déc.). Kœnigs, P. F. S., 101, boulevard Arago.
1892 (26 janv.). Bioche, Prof. Louis-le-G., 56, rue N.-D.-des-Champs.
1900 (10 mars). Leau, Prof. Stanislas, 6, rue Vavin.
— (22 déc.). Le Roy, Prof. Stanislas, 27, rue N.-D.-des-Champs.
1902 (27 juin). Deschamps, 195, rue de Tolbiac.
1902 (13 déc.). Grévy, Prof. Saint-Louis, 71, rue Claude-Bernard.
1904 (20 nov.). Perrin (R.), I.G.M., 61, rue de Vaugirard.
1905 (14 janv.). Maillet, I. P. C., 11, rue de Fontenay, à Bourg-la-Reine (Seine).
1905 (27 mai). Servant, Chef des tr. F.S., 8, rue des Saints-Pères.
1906 (24 fév.). Lebon (Ernest), P. H., 4 *bis*, rue des Écoles.
1906 (12 mai). Tarry (Gaston), 177, boulevard Pereire.
— (8 déc.). Fatou, astronome adjoint à l'Observatoire, 172, boulevard Montparnasse.
— (22 déc.). Henri (Victor), M. C. (Htes Études), 82, rue Claude-Bernard.
1907 (11 mai). Chapelon (J.-J.), Ing. au Corps des M., 21, rue Bréa.
1909 (15 mars). Léauté (A.), Ing. au Corps des M., École des Mines.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1903 (28 mars). Lieutenant-Colonel du Génie Brocard, 75, rue des Ducs, Bar-le-Duc.
1905 (11 fév.). (Berdon) Louis, 39, Cadogan Street, Londres S. W.
1906 (25 juin). Guccia, Palerme.
1907 (9 fév.). Desmoulin, P. F. S., 10, rue Joseph-Plateau, Gand.
1908 (12 déc.). A. Gérardin, 32, quai Claude-le-Lorrain, Nancy.

DEUXIÈME SECTION. — SCIENCES PHYSIQUES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1862 (10 juill.). Troost (Louis), M. I., P. H. F. S., 34, rue Bonaparte.
1863 (18 juill.). Grandeau (Louis), I. G. A., 4, avenue de La Bourdonnais.
1864 (31 janv.). Wolf (Charles), M. I., P. H. F. S.
1872 (22 juin). Gernez (Désiré), M. I., P. E. N., 80, rue d'Assas.
1873 (12 avril). Fron, Météorologiste tit., 19, rue de Sèvres.
1874 (23 mai). Branly, Prof. Inst. Catholique, 21, av. de Tourville.
1875 (10 avril). Cailletet, M. I., 75, boulevard Saint-Michel.
1876 (27 mai). Bouty, M. I., P. F. S., 9, rue du Val-de-Grâce.
1877 (24 fév.). Lippmann (Gabriel), M. I., P. F. S., 10, rue de l'Éperon.
1880 (13 nov.). Pellat (Henri), P. F. S., 23, avenue de l'Observatoire.
1882 (11 fév.). Cochin, député, 53, rue de Babylone.
1884 (9 avril). Bourgeois (Léon), A. M., 1, boulevard Henri-IV.
1886 (17 avril). Bordet (Lucien), 181, boulevard Saint-Germain.
1887 (9 juillet). Vallot (Joseph), Dir. de l'Obs. du Mont-Blanc.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1901 (26 janv.). Vincent, Prof. Saint-Louis, 207, rue de Vaugirard.
— (14 déc.). Benoist, Prof. Henri-IV, 26, rue des Écoles.
— (28 déc.). Dongier, Météor. tit. Obs. de Paris, 99, Grande-Rue, à Bourg-la-Reine (Seine).
— (13 déc.). Matignon, P. C. F., 17, boul. Carnot, Bourg-la-Reine.
1903 (28 fév.). Winter, 44, rue Saint-Placide.
— (14 mars). Berthelot (Daniel), P. E. Ph., 31, rue de Tournon.
— *id.* Desgrez, P. A. F. M., 78, boulevard Saint-Germain.
— (12 déc.). Darzens, Répét. E. P., 22, avenue Ledru-Rollin.
1904 (23 janv.). Chauveau, Météor. adj. Obs. de Paris, 51, rue de Lille.

1904 (29 mai). Moureu, M. A. M., P. E. Ph., 15, rue Soufflot.
— *id.* Mahler, Ingénieur civil des Mines, 2, rue Decamps.
— (9 juillet). Marage, 14, rue Duphot.
1905 (14 janv.). Hallion, chef de Lab. C. F., 54, faub. Saint-Honoré.
— (11 mars). Valeur, P. A. E. Ph., 142, boulevard Montparnasse.
— (1er avril). Goutal, P. suppl. E. M., 60, boulevard Saint-Michel.
— (13 mai). Mouneyrat, 20, rue Godot-de-Mauroi.
1906 (13 janv.). Mayer, M. C. (Hautes-Études), 33, rue du Faubourg-Poissonnière.
— (24 fév.). Joannis, P. F. S., rue des Imbergères, Sceaux.
1907 (14 déc.). Becquerel (Jean), I. P. C., P. M., 15, boulevard Saint-Germain.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1905 (13 mai). Mathias, P. F. S., 44, allées Lafayette, à Toulouse.
— (22 juil.). Monpillard, 22, boulevard Saint-Marcel.

TROISIÈME SECTION. — SCIENCES NATURELLES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1856 (20 déc.). Prillieux (Ed.), M. I., sénateur, 14, rue Cambacérès.
1862 (7 mai). Bureau (Ed.), P. H. M., M. A. M., 24, quai de Béthune.
1863 (31 janv.). Vaillant (L.-L.), P. M., 36, rue Geof.-Saint-Hilaire.
1871 (9 déc.). De Seynes (Jules), P. A. F. M., 15, rue Chanaleilles.
— (23 déc.). Grandidier (A.), M. I., 71 *bis*, rue du Ranelagh.
— (26 déc.). Van Tieghem (Philippe), M. I., P. M., 22, rue Vauquelin.
1871 (26 déc.). Chatin (J.), M. I., M. A. M., P. F. S., 174, boulevard Saint-Germain.
1879 (10 mai). Henneguy (Louis-Félix), M. I., M. A. M., P. C. F., 9, rue Thénard.
1883 (26 mai). Mocquard, A. M. hon., 4, rue du Banquier.
1886 (13 fév.). Bouvier (E. L.), M. I., P. M., 7, boulevard Arago.

1888 (11 fév.). Morot, A. M., 9, rue du Regard.
1890 (21 fév.). Roché, 4, rue Dante.
1893 (11 mars). Hua, Direct. adj. de Lab. (Hᵗᵉˢ Etudes), 254, boulevard Saint-Germain.
— (10 juin). Jousseaume, 29, rue Gergovie.
1893 (27 oct.). De Guerne, 6, rue de Tournon.
1894 (17 mars). Roland Bonaparte, M. I., 10, avenue d'Iéna.
1899 (14 janv.). Lecaillon, Prép. C. F., 28, rue Berthollet.
1899 (25 mars). Neuville, Prép. Mus., 55, rue de Buffon.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1889 ( ). Menegaux, A. M., 55, rue de Buffon (réintégré le 23 avril 1904).
1901 (12 janv.). Pellegrin, A. M., 143, rue de Rennes.
— (18 mai). Guieysse, Chef de Lab. F. M., 63, boulevard Saint-Michel.
1901 (11 janv.). Chauveau, Direct. adj. de Lab. (Hautes-Etudes), 16, avenue d'Orléans.
— (8 fév.). Rabaud, M. C. F. S., 3, rue Vauquelin.
— (27 juin). Lesage, Méd. des Hôp., 226, boulevard Saint-Germain.
— (22 nov.). Anthony, Prép. Muséum, 12, rue Chevert.
1903 (28 fév.). Coutière, P. E. Ph., 12, rue Notre-Dame-des-Champs.
— (11 avril). Langeron, Prép. F. M., 78, rue de l'Abbé-Groult.
— (27 juin). Noé, Prép. F. M., 51, boulevard Montparnasse.
1904 (9 janv.). Grandidier (G.), 2, rue Gœthe.
— (23 janv.). De Boissieu, 80, avenue d'Iéna.
— *id.* Joubin, P. M., 88, boulevard Saint-Germain.
— (26 mars). Gravier, A. M., 55, rue de Buffon.
— (29 mai). Michel (Auguste), Prof. Michelet, 7, rue Nicole.
— (9 juil.). Launoy (L.), Prép. Inst. Pasteur.
1905 (28 janv.). Cayeux, P. E. M., P. I. A., 6, place Denfert-Rochereau.
— (8 juil.). Lemoine (Paul), Chef des trav. Muséum, 96, boulevard Saint-Germain.
1909 (13 mars). Legendre (R.), Prép. Mus., 24, rue Boissonnade.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1903 (27 juin). L. Petit, 27 *bis*, rue d'Elbeuf, Rouen.
— (28 nov.). Devez, Cayenne.
1904 (23 avril). Bull, Prép. à l'Institut Marey, 1, avenue Malakoff.
— *id.* Tur, Ass. à l'Univ. de Varsovie.
— *id.* Malard, Chef de travaux Lab. de Zool. marit., St-Vaast-la-Hougue (Manche).
— (29 mai). Marceau, P. E. M., Besançon.
1905 (26 nov.). Maignon, Chef des trav. de Physiol., E. Vét. de Lyon.
— (11 mars). Neveu-LemaireP, . A. F. M., Lyon.
— (15 avril). Diguet (L.), 16, rue Lacuée.
1906 (24 févr.). Osman Galeb Bey, le Caire (Égypte).
1908 (23 mai). Rivet, 61, rue de Buffon.

EXTRAITS DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES

Séance du 12 décembre 1908

PRÉSIDENCE DE M. LÉCAILLON

Le président rappelle que l'un des prix Nobel vient d'être décerné à M. Lippmann, membre de la Société. Un prix de l'Institut a été aussi décerné à M. Mayer.

Sur la proposition de M. Lebon, les rapports écrits sur les candidatures seront désormais conservés aux archives. M. Lebon lit son rapport sur la candidature de M. Gérardin. Il est procédé de suite au vote. M. Gérardin est élu à l'unanimité des membres présents.

M. Matignon fait une communication sur une loi de constance de la variation d'entropie, dans les systèmes monovariants, et sur la constance de la variation relative de la chaleur de réaction entre deux températures correspondantes.

Séance du 9 janvier 1909

PRÉSIDENCE DE MM. LÉCAILLON ET PERRIN

Il est procédé à l'élection des membres du Bureau et du Conseil. Sont élus :

Vice-président : M. Matignon ;
Secrétaire des séances : M. Winter ;
Vice-secrétaire des séances : M. Lebon ;
Secrétaire des publications : M. Coutière ;
Vice-secrétaire des publications : M. Neuville ;
Trésorier : M. Rabaud ;
Membres du Conseil : MM. André, Dongier, Grévy, Henneguy Laisant, Lucien Lévy, Berthelot, Vaillant ;
Commissaires des comptes : MM. Fatou, J. Becquerel, Goutal, rapporteur.

M. Lécaillon, président sortant, adresse à la Société ses remerciements et invite M. Perrin à prendre place au fauteuil. M. Perrin, dans une courte allocution, remercie ses collègues et en particulier le président sortant.

Une place est déclarée vacante dans la 3e section.

M. Lebon est délégué à Rennes pour représenter la Société au Congrès des Sociétés savantes. La liste des délégués éventuels ne sera d'ailleurs close que fin mars.

MM. Rabaud, Michel, Lécaillon sont désignés pour organiser le banquet annuel.

M. Berthelot fait une communication sur la construction des grandes stations électriques dans la région parisienne.

Séance du 23 janvier 1909

PRÉSIDENCE DE M. PERRIN

Les candidatures de MM. Semichon, Legendre, Fauré-Frémiet, Terroine sont proposées à la Société dans la 3e section.

La date du banquet est fixée au 1er mars.

M. Michel fait une communication sur la reproduction des Syllidiens, qu'il a eu l'occasion d'observer à la station zoologique de Naples, et en particulier d'une nouvelle forme de Syllidien à stolon acéphale.

M. Gravier expose les méthodes et les résultats des récentes recherches océanographiques en Norvège.

M. Henneguy fait une communication sur un élément histologique nouveau qu'il a découvert dans le tube digestif antérieur de deux espèces de Bryozoaires. Il s'agit de cellules dont la paroi est constituée par des fibres musculaires striées. Leur contraction amène la turgescence du contenu cellulaire et fait saillir la paroi libre. L'ensemble des cellules agit sans doute comme appareil masticateur.

Séance du 13 février 1909

PRÉSIDENCE DE M. PERRIN

M. Rabaud propose M. Rivet, membre correspondant, comme candidat dans la 3e section.

M. Laisant propose la candidature de M. André Léauté dans la 1re section.

MM. Laisant, Lebon, J. Becquerel, rapporteurs, sont chargés de l'examen de cette candidature.

Mme Vve Laussedat remercie la Société de la belle notice que M. Perrin a consacrée à la vie et à l'œuvre d'Aimé Laussedat.

M. Mahler retrace la vie d'un savant du XVIIIe siècle, le duc de Chaulnes.

M. Michel fait une communication sur quelques cas anormaux de têtes supplémentaires : 1° chez les Syllidiens, notamment de têtes stoloniales sur douze segments successifs de *Syllis amica;* 2° chez *Saccocirrus*, par bourgeonnement d'une tête latérale.

M. Marage parle de quelques instruments de musique considérés comme précolombiens.

La Société, réunie en comité secret, désigne MM. Gravier, Hua, Pellegrin, rapporteur, pour l'examen des titres des cinq candidats à la place vacante dans la 3e section.

Séance du 27 *février* 1909

PRÉSIDENCE DE M. PERRIN

M. Pellegrin lit son rapport dont les conclusions sont les suivantes : M. Semichon est proposé en première ligne, MM. Fauré-Frémiet, Legendre, Rivet, Terroine en deuxième ligne, et par ordre alphabétique.

Il sera envoyé une lettre de convocation à tous les membres de la Société, rappelant la date de l'élection.

M. Pellegrin développe quelques points de son mémoire sur les Poissons d'eau douce de la Guyane française.

Séance du 13 *mars* 1909

PRÉSIDENCE DE M. PERRIN

M. Chapelon lit son rapport au nom de la Commission des comptes.

Il est ensuite procédé au vote, qui donne les résultats suivants :

MM.	Semichon	8 voix
	Legendre	12 —
	Terroine	2 —
Nombre de votants		22

M. Legendre est élu.

M. Rivet avait retiré sa candidature.

M. J. Becquerel donne lecture de son rapport sur la candidature de M. A. Léauté. Il est procédé immédiatement au vote, l'assemblée étant en nombre. M. A. Léauté est élu par 18 voix. M. J. Becquerel veut bien se charger de rédiger la notice relative à Henri Becquerel; M. Cayeux, celle relative à Albert Gaudry.

M. Matignon fait une communication sur la courbe de fusibilité du système sel marin + eau, et ses applications à la fusion de la neige.

M. Deschamps développe la communication qu'il a faite à la Société le 25 juillet dernier.

M. Laisant parle des propriétés des progressions par différence.

Séance du 27 mars 1909

Présidence de M. Matignon

M. Berthelot parle de la réforme proposée des unités électriques C. G. S. Il expose à ce sujet comment elles furent établies, et la difficulté de leur substituer de nouvelles unités, malgré leur insuffisance actuelle devant le développement des grandes industries électriques.

M. Marage, rappelant la théorie d'Helmholtz sur la formation des voyelles, démontre que la cavité buccale, agissant comme résonateur, n'est pas indispensable; ces voyelles sont en effet émises, la bouche étant remplie par un moule plastique qui empêche ses parois de vibrer.

Le banquet de la Société Philomathique a eu lieu le 1er mars, au restaurant Champeaux.

Étaient présents : MM. André, Berthelot, Chapelon, Cayeux, Darzens, Henneguy, Lebon, Lécaillon, Lesage, Mahler, Mayer, Ménégaux, Michel, Moureu, Perrin, Tarry.

S'étaient excusés : MM. Bourgeois, Dongier, Guieysse, Hua, Laisant, Lemoine, Matignon, Pellegrin.

Au dessert, M. Perrin, président, a prononcé l'allocution suivante :

« Messieurs et Chers Confrères,

« Un des plus illustres savants de notre temps, que la Société Philomathique s'honore d'avoir compté dans son sein, a cru pouvoir prédire qu'un jour viendrait où l'humanité, délaissant les vulgaires

aliments empruntés directement à la chair des animaux ou aux produits parfumés de nos champs et de nos vergers, ne se nourrirait plus que de quelques pilules savamment variées et dosées, suivant l'âge, le tempérament et l'état de santé de chacun, de manière à lui fournir exclusivement la somme d'aliments assimilables nécessaires pour assurer l'entretien, le développement ou le rajeunissement de son énergie intellectuelle et musculaire. Vous me permettrez, Messieurs, de douter que l'illustre auteur de cette prophétie fût lui-même autrement pressé d'en voir l'accomplissement; ce que je crois, en tout cas, pouvoir affirmer, c'est que la plupart d'entre nous seraient reconnaissants à ceux de nos confrères qui cultivent spécialement la chimie biologique, s'ils daignaient ne pas trop activer leurs travaux dans cet ordre d'idées, et nous laisser en perspective, pour quelques années encore, le plaisir de nous réunir comme aujourd'hui suivant les rites antiques et traditionnels, c'est-à-dire autour d'une table élégamment décorée et bien garnie de mets délicats et de vins généreux, pour y resserrer, autrement que par l'absorption simultanée (fût-ce en cadence et même aux sons de la musique) des pilules scientifiques de l'avenir, les liens de cette bonne confraternité à laquelle les traditions et la devise même de notre Société convient tous ses membres. Il ne semble pas d'ailleurs que cette obligation morale qui leur est imposée en y entrant soit bien lourde à assurer, tout au contraire ; je n'en veux pour preuve que la facilité avec laquelle se remplissent depuis quelques années nos cadres, pendant assez longtemps un peu anémiés ; il nous est permis à ce sujet de constater avec satisfaction que la dernière place actuellement vacante dans la 3e section (je n'ose dire le dernier fauteuil, notre modeste salle des séances ne comportant pas encore de sièges aussi confortables) n'est pas sollicitée par moins de cinq candidats, tous recommandables par leurs travaux, et entre lesquels nous serons certainement embarrassés de faire un choix.

« Messieurs, je suis assuré d'être votre interprète en remerciant ceux de nos confrères qui ont bien voulu se charger de la tâche un peu ingrate d'organiser notre banquet annuel ; ils doivent toutefois regretter que nous ne soyions pas plus nombreux pour profiter du résultat de leurs efforts. Ce que je me permets de regretter surtout, pour ma part, c'est qu'un aussi faible contingent, parmi nos membres honoraires, soit venu témoigner par sa présence de l'intérêt que tous, j'en suis persuadé, continuent de porter à cette Société qui a accueilli jadis leurs premiers travaux, applaudi à leurs succès, et reste fière des hautes situations scientifiques auxquelles la plupart sont par-

venus ; ils auraient certainement retrouvé ici avec plaisir leurs jeunes confrères désireux de suivre leur exemple et de marcher sur leurs traces. Nous n'en serons d'ailleurs que plus reconnaissants à ceux d'entre eux que je vois en face et à côté de moi, et qui ont bravé les rigueurs d'un hiver exceptionnellement prolongé pour nous donner une nouvelle preuve de leur cordiale et confraternelle sympathie.

« Messieurs et chers confrères, je vous propose de boire tous avec moi à la prospérité de notre vieille, mais toujours jeune Société Philomathique. »

M. Henneguy a pris aussi la parole pour souhaiter à la Société Philomathique une nouvelle et longue prospérité.

RAPPORT

Sur la situation financière de la Société en 1908

Par M. Jacques CHAPELON.

Messieurs,

Je viens, en conformité de l'article 60 des Statuts, soumettre à votre approbation les comptes de l'exercice 1908.

Recettes et dépenses courantes de l'exercice 1908

I. — Recettes

Cotisations des membres titulaires	980 »
— — correspondants	150 »
— arriérées	90 »
Subvention ministérielle	1.000 »
Abonnements et vente du *Bulletin*	161 25
Remboursement des tirés à part	24 65
Intérêts des fonds placés	272 13
	2.678 03

II. — Dépenses

Frais généraux, circulaires, affranchissements, frais de bureaux		199 08
Imprimés		98 »
Impression du bulletin et tirages à part	1.159 40	1.545 20
Photogravure	385 80	
Étrennes		20 »
Indemnité de M. Reykaert		200 »
— de M. Vézinaud		300 »
		2.362 28
Excédent des recettes sur les dépenses		315 75
Les fonds en caisse au 1er janvier 1908 étaient de		9.102 48
Ils se sont élevés au 1er janvier 1909 à		9.418 23
Savoir :		
Aux mains du trésorier		1.863 37
— de l'agent		41 81
En titres d'une valeur d'achat de		7.513 03

Leur valeur actuelle est supérieure d'un millier de francs environ.

Les dépenses de l'année 1907 ont été plus grandes que celles de l'an dernier, à cause du *Bulletin* dont la publication cause la majeure partie de la dépense. Les frais de dépense du *Bulletin* sont, cette année, de près de 200 francs de moins que l'an passé. Nous voyons donc que le *Bulletin* est arrivé à cet état à peu près normal que souhaitait l'an passé M. Tarry, état dans lequel les dépenses équilibrent à peu près les recettes, si ce n'est chaque année, au moins dans un cycle de quelques années.

Il résulte de cet exposé que nos recettes augmentent; le léger déficit de l'an passé se trouve amplement comblé par l'excédent des recettes de cette année ; la situation financière de notre Société est donc excellente.

Messieurs, la Commission vous propose d'approuver ses comptes et de vous associer à elle pour adresser de chaleureux remerciements à M. Rabaud, notre trésorier, dont nous admirons la conscience et le dévouement. Le zèle de M. Vézinaud mérite aussi une mention louangeuse.

UNE PROPRIÉTÉ DES PROGRESSIONS PAR DIFFÉRENCE;

Par C.-A. LAISANT.

On connaît cette propriété de la progression

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots\ldots$$

dont les termes sont les nombres impairs consécutifs :

Si on forme dans cette suite des groupes consécutifs de 1, 2, 3,.... termes :

$$1 \cdot 3.5 \cdot 7.9.11 \cdot 13.15.17.19, \ldots\ldots$$

les sommes des termes de chaque groupe

$$1, \quad 8, \quad 27, \quad 64, \ldots\ldots$$

sont les cubes successifs des nombres entiers.

Il s'ensuit que la somme des termes du groupe du rang p, qui contient p termes, est égale à p^3 ; on peut encore énoncer ce résultat en disant que la valeur moyenne des termes de chaque groupe est le carré du nombre de ses termes.

En cherchant à généraliser cette propriété, je me suis posé la question suivante. Considérons une progression par différence

$$(P) \qquad a \cdot a + r \cdot a + 2r, \ldots\ldots$$

Formons dans cette suite, à partir du début, des groupes successifs dont les nombres de termes soient indiqués par les nombres ci-dessous qui forment une progression par différence à termes entiers.

$$(II) \qquad \alpha \cdot \alpha + \rho \cdot \alpha + 2\rho, \ldots\ldots,$$

et proposons-nous de trouver la somme des termes du groupe de rang p, contenant un nombre N de termes fourni par la formule :

$$N = \alpha + (p - 1)\rho.$$

Un calcul fort simple donne pour l'expression de cette somme :

$$S = N\left[a + \frac{r}{2}(\alpha - 1) + \frac{r}{2\rho}(N^2 - \alpha^2)\right].$$

et par conséquent la valeur moyenne des termes de ce groupe est :

$$a + \frac{r}{2}(\alpha - 1) + \frac{r}{2\rho}(N^2 - \alpha^2).$$

Dans le cas particulier indiqué au début, on a $a = \alpha = \rho = 1$, et $r = 2$; on retrouve N^2 pour valeur moyenne.

Pour toutes les progressions (Π) commençant par 1, l'expression se réduit à

$$a + \frac{r}{2\rho}(N^2 - 1).$$

Si, en même temps, $\frac{r}{\alpha} = 2\rho$, on obtient aN^2.

Lorsque $a = \alpha = 1$, la valeur moyenne est $\frac{r}{2\rho}(N^2 - 1) + 1$; et si en outre le rapport $\frac{r}{\rho}$ est égal à 2, on retrouve la proposition du début, sans y rien changer.

Par exemple, la progression

1 . 7 . 13 . 19 .....

de raison 6, en formant des groupes des 1, 4, 7,... termes, donne :

1 . 7.13.19.25, ...

et les valeurs moyennes sont :

1, 16, 49, ...

c'est-à-dire que les sommes sont :

1^3, 4^3, 7^3, ...

Si les raisons des deux progressions (P) et (Π) sont égales et qu'elles commencent par 1 l'une et l'autre, la valeur moyenne est $\frac{N^2 + 1}{2}$, ainsi qu'on peut le vérifier sur les groupes suivants :

1 . 2.3 . 4.5.6 . 7.8.9.10 . 11.12.13.14.15 .....

UN SAVANT AU XVIIIe SIÈCLE : LE DUC DE CHAULNES (1)

Par P. MAHLER.

Michel-Ferdinand de Chaulnes fut, par la noblesse de son cœur et par la hauteur de son esprit, le premier parmi les gentilshommes de la cour de Louis XV (2).

D'abord, duc de Picquigny et soldat, il est, à vingt ans, au siège de Philipsbourg. Puis, mestre de camp, il assiste à la plupart des affaires de la guerre de la Succession d'Autriche, depuis Prague jusqu'aux batailles de Raucoux et de Lawfeld. M. de Picquigny est à la guerre avec tout son courage et toute son intelligence. Il gagne le grade de maréchal de camp, en 1743. Le 9 novembre de l'année suivante, il arrive à la frontière, le jour même de la mort de son père, avec des dépêches qui annoncent la prise de Fribourg. Le maréchal de Saxe estime M. de Picquigny, maintenant duc de Chaulnes, et, à Fontenoy, prend sa collaboration pour la manœuvre d'artillerie qui décide la victoire. Rentré en France, M. de Chaulnes, malgré ses goûts personnels, malgré ses obligations à la cour, donne tous ses soins à l'instruction des chevau-légers et organise pour eux une école. Le pays dut, peut-être, sa première école de cavalerie à l'initiative de M. de Chaulnes.

M. de Chaulnes était grand, un peu gros ; le visage noble, plein d'affabilité. La duchesse le proclamait stoïque. On vantait la douceur de son caractère. On le savait compatissant à toutes les misères. On recherchait sa conversation toujours gaie et amusante, même dans

(1) Il ne faut pas confondre Michel-Ferdinand de Chaulnes avec son fils le vidame d'Amiens, mort vers 1790. Le vidame d'Amiens, membre de l'Académie des Sciences et de la Société royale de Londres, fut colonel et égyptologue, chimiste et original. On se souvient de ses travaux sur l'alcali volatil et sur l'air fixe. On sait qu'il eut, à propos de Mlle Ménard, des démêlés avec Beaumarchais qui retardèrent, paraît-il, la première représentation du *Barbier de Séville*.

(2) Michel-Ferdinand d'Albert d'Ailly, d'abord vidame d'Amiens, puis duc de Picquigny, pair de France, chevalier des ordres du roi, maréchal de camp, lieutenant de chevau-légers, gouverneur de l'Artois et de la Picardie, et membre honoraire de l'Académie des Sciences, né le 31 décembre 1714, mort le 23 septembre 1769 (*Dictionnaire de la Noblesse; Mémoires* du duc DE LUYNES, *passim; Journal* de BARBIER, t. II, IV, VI ; D'ARGENSON, *Mémoires*, t. VI ; *Histoire de l'Académie des Sciences*, 1769 : *Éloge du duc de Chaulnes*, par DE FOUCHY ; Nouvelle table des articles contenus dans les volumes de l'Académie des Sciences : *Notice biographique*, par l'abbé ROZIER).

Le duc de Chaulnes passa ses meilleures années rue d'Enfer, à l'hôtel de Vendôme, aujourd'hui enclavé dans l'École des Mines.

les sujets les plus arides. Le roi disait : « Voilà l'honnête homme. » Mme de Pompadour n'eut pas d'ami plus assidu ni plus dévoué.

C'est ainsi que M. de Chaulnes, en février 1757, dîna en tête à tête avec la marquise délaissée par les courtisans, à la suite de l'attentat de Damiens. C'est ainsi que M. de Chaulnes fiança le vidame d'Amiens, son fils, encore en bas âge, avec Mlle d'Etioles qui mourut à onze ans. C'est ainsi qu'un peu avant les fiançailles du vidame et de Mlle d'Etioles, M. de Chaulnes emprunta 24.000 livres à Mme de Pompadour.

Admettre un mot des insinuations venimeuses de d'Argenson serait méconnaître le duc de Chaulnes et Mme de Pompadour. Mais il est certain que le duc dépensait beaucoup d'argent et que les revenus qu'il tirait de la grosse fortune de Mme de Chaulnes, du gouvernement de Picardie et d'Artois, de la lieutenance de Bretagne et de toutes les autres dignités ne lui suffisaient pas.

M. de Chaulnes était fastueux, par devoir. En 1750, il alla à Rennes avec la duchesse, pour tenir les États de Bretagne. Il avait reçu 145.000 livres de frais de représentations, et il revint à Paris avec des dettes. Pendant quarante-sept jours, M. de Chaulnes avait donné tous les jours, matin et soir, un repas de quatre-vingts couverts. Chaque soir, il avait eu un bal ordinaire ou un bal masqué et deux tables de lansquenet, jusqu'à sept heures du matin.

M. de Chaulnes aimait les arts et les belles-lettres, jouait du violon à merveille et entretenait un orchestre de domestiques musiciens. L'orchestre de l'hôtel de Chaulnes était un des meilleurs de Paris et Mme de Pompadour le mandait à Versailles pour égayer les soirées des petits appartements. On admirait les collections d'objets d'art et ces antiquités orientales, que le duc devait à sa situation de directeur honoraire de la Compagnie des Indes. Plus tard, la bibliothèque fut vendue 42.123 livres [1].

Enfin, source intarissable de dépenses, M. de Chaulnes aimait la science avec passion. Travail désintéressé, enthousiasme, don presque entier de la fortune et du temps, le duc sacrifiait tout à l'avancement des connaissances humaines.

Dès 1743, encore duc de Picquigny, sans avoir différé aucun devoir militaire, il avait déjà assez d'autorité pour entrer à l'Académie des Sciences. C'était l'immortelle Académie royale, où il

[1] J. Guigard, *Nouvel Armorial du Bibliophile*, 1890, t. II : M. de Chaulnes avait réuni pour plus de 200.000 francs de livres rares et d'estampes précieuses. On les vendit, en 1770, au nouvel hôtel de Chaulnes.

rencontra d'Alembert, Clairaut, Cassini, Réaumur. Près de ces maîtres M. de Chaulnes fut plus qu'un amateur, mieux qu'un disciple, un collaborateur. Observateur attentif, il enrichit les journaux savants de ses observations sur la physique, sur l'optique, sur l'histoire naturelle. Il accrut la multitude de ses constatations, qui forment la matière même de la science expérimentale. Il se pénétra de cette vérité que la certitude est assurément le facteur le plus efficace du progrès scientifique.

Aussi, porté vers l'astronomie, M. de Chaulnes s'appliqua-t-il à l'étude des instruments. Mécanicien, ingénieur, il établit des machines à diviser et des micromètres, imagina des appareils pour mesurer la réfringence du verre et la courbure des lentilles et créa des instruments perfectionnés d'astronomie et de géodésie.

M. de Chaulnes est l'auteur d'une méthode classique pour mesurer, à l'aide du microscope, les indices de réfraction. Ses principaux mémoires, parus en 1768, sont encore aujourd'hui très intéressants; on y voit, en particulier, que la physique et l'astronomie avaient la méthode scientifique et l'appareil exact à l'heure où la chimie sortait à peine de l'enfance (1).

Au temps de M. de Chaulnes, il y avait, rue d'Enfer, un atelier de mécanique de précision, un musée d'histoire naturelle et un cabinet d'instruments. M. de Chaulnes eut la plus grosse machine électrique de l'époque. Cette machine, complétée par une batterie, servit à reproduire, pour la première fois en France, les effets de la foudre.

Dans ses salons, donnés à la science, le duc réunissait ses amis de l'Académie, surtout les mathématiciens et les astronomes, Clairaut, du Mairan, Le Monnier. C'était l'Académie en raccourci. Mme de Chaulnes ne manquait pas une de ses séances.

« Mme de Chaulnes (2), disait Mme du Deffand, veut toujours savoir

(1) Lavoisier entra à l'Académie le 1er juin 1768. Les travaux de M. de Chaulnes sont le *Journal des Savants* et surtout dans l'*Histoire de l'Académie des Sciences*. Il y en a sur la diffraction, sur des observations astronomiques, sur la longueur des dents du lapin (1765), etc.

Les mémoires sont bien écrits, faciles à lire et sans algèbre. Les plus importants sont : *Nouvelle Méthode pour diviser les instruments de mathématique* et *Description d'un microscope et de différents micromètres pour mesurer les parties circulaires et droites avec précision* (*Description des Arts et Métiers*, par Messieurs de l'Académie des Sciences, Paris, in-f°, 1768).

(2) *Correspondance générale de Mme du Deffand* (édit. Lescure, t. I : préface et lettres de Mme du Deffand, du président Hénault et de Mme de Chaulnes) : Sénac de Meilhan, *Portraits et caractères*, *Lasthénie ; Mémoires* du comte de Maurepas, t. IV, f. 154 ; Chamfort ; les Goncourt, *Portraits intimes et la Femme au XVIIIe siècle ;* Grasset-Morel, *les Bonnier*, 1886.

qui l'a pondu, qui l'a couvé ; c'est un esprit profond, mais nullement gracieux. » Mme de Chaulnes est curieuse et intelligente. Elle s'intéresse à la physique, aux sciences naturelles ; les mathématiques l'attirent davantage. A la première séance de la petite Académie, elle demanda qu'on lui apprenne l'algèbre. C'est l'émule rêvée de Mme du Chatelet, le galant Clairaut s'empresse. Six mois plus tard, Mme de Chaulnes en sait assez pour embarrasser son mari et les amis de son mari. Sa jeune intelligence a deviné plutôt qu'elle n'a appris.

M. de Chaulnes avait épousé, en 1734, Anne-Josèphe (1), fille de Joseph Bonnier de la Mosson, trésorier des états du Languedoc, et petite-fille de Bonnier, marchand drapier à Montpellier. Mlle Bonnier n'était pas belle, mais elle était riche, et la mère avait engagé le fils à prendre du fumier pour engraisser ses terres. Bourgeoise à peine déracinée, méridionale, éduquée à Paris, Mme de Chaulnes fut sans gêne, extravagante et spirituelle.

L'ambition de M. de Chaulnes était de vivre en bourgeois, dans le quartier de l'Observatoire. L'esprit de Mme de Chaulnes la poussait partout où était le grand monde.

Mme de Chaulnes apparaissait froide, presque timide. On entourait l'enfant terrible de ce siècle où il fallait avoir tant d'esprit pour en avoir assez. Le moindre choc animait le teint de cire, les yeux d'aigle étincelaient. La *Pecquigni* avait ses grandes vapeurs. C'était l'explosion d'un génie fou avec les éclairs de la raison et le désordre de la bouffonnerie. Rien n'y résistait : sottises, ridicules, bassesses. Tant il y avait d'esprit chez cette femme qui n'en voulait qu'à l'esprit et qui n'aurait pu s'empêcher de dire le défaut de l'esprit de l'homme qui lui aurait sauvé la vie. Cela dura quarante ans (2).

Il eût été alors déplacé d'être fidèle à un mari comme M. de Chaulnes. Certes, Mme de Chaulnes admirait les hautes vertus de son mari, mais elle était esclave de sa curiosité et de sa fantaisie. M. de Chaulnes et un ami de Madame, M. de Stainville, en firent une maladie. M. de Stainville reçut du roi le conseil d'être plus prudent. Le stoïque M. de Chaulnes ne comprit rien et chercha l'explication scientifique. Comme il avait fait peindre Mme de Chaulnes en Hébé, Mlle Quinault dit au duc : « Faites-vous peindre en hébété (3) ».

En mars 1755, Mme de Chaulnes soutint avec tant d'ardeur la candidature à l'Académie du séduisant abbé de Boismont, que l'on fit un couplet au Palais-Royal, où l'on protégeait M. de Châteaubrun.

(1) Née en 1718.
(2) Goncourt, Sénac. du Deffand.
(3) Maurepas, Chamfort.

Déjà Livie en votre temple
A mis jadis un guerrier sans talent,
Aujourd'hui même Julie à son exemple
Prenez garde qu'enfin quelque autre Messaline,
Pousse un petit collet qu'elle a mis sur les dents.
Ne consultant que ses seuls intérêts,
Pour confrère ne vous destine
Un âne de Mirebalais (1).

Les scandales s'ajoutèrent aux scandales. Redoublant d'activité, M. de Chaulnes demanda à la science les consolations dont il avait tant besoin. Il publiait, le 3 juin 1766, son dernier travail : *Observation du passage de Vénus sur le Soleil*. Trois mois plus tard, le pauvre M. de Chaulnes succombait, accablé par la honte et les chagrins.

Mme de Chaulnes ne perdit pas son temps à pleurer. Elle commença à la succession du duc un procès, le gagna à la suite du rapport d'un jeune maître des requêtes, M. de Giac, et prit M. de Giac pour mari. « Une duchesse a toujours trente ans », dit-elle. Le roi pensa aussitôt à envoyer au garde-meuble le tabouret de la duchesse.

Une rupture éclatante suivit de près le mariage. Mme de Giac mourut obscurément, en 1782, au Val-de-Grâce. Personne ne s'aperçut de sa disparition, sauf les pauvres du quartier (2).

ÉQUILIBRES ENTRE PHASES LIQUIDE ET SOLIDES DANS LE MÉLANGE NaCl + H^2O. — FUSION DE LA NEIGE ;

Par Camille MATIGNON.

Rudorff (3), de Coppet (4), Mendeléef, Meyerhofer et Saunders (5) ont déjà déterminé certains points de la courbe de fusibilité du système binaire, eau et sel marin ; mais les résultats en sont assez dis-

(1) *Journal* de Collé, t. II : Livie, Mme de Pompadour ; guerrier sans talent, M. de Buci ; Julie, Mme de Chaulnes ; petit collet, M. de Boismont.

(2) On dit à Mme de Giac, mourante et séparée de son mari : « Les sacrements sont là. — Un petit moment. — M. de Giac voudrait vous revoir. — Est-il là ? — Oui. — Qu'il attende ; il entrera avec les sacrements. » (Chamfort.)

(3) *Ann. Pogg.*, C. 114, p. 71 ; 1861.

(4) *Ann. chim. et phys.*, 4e série, C. 25, p. 511 ; 1872.

(5) *Zeitscher. phys. Chem.*, C. 31, p. 381 ; 1899.

cordants. C'est ainsi que la température et la concentration qui définissent le point d'eutexie auraient les valeurs suivantes, d'après les différents observateurs :

Rudorff	— 21°,3	»
De Coppet	— 23 ,6	31,24
Mendeléef	— 23	32,50
Meyerhoffer	— 21 ,2	28,90

Les concentrations indiquent la quantité de sel dissoute dans 100 parties d'eau.

Ce manque de concordance, qui se rencontre aussi pour les autres points de la courbe, m'a engagé à reprendre ces recherches.

Pour déterminer les constantes du point d'eutexie, j'ai placé des solutions à 28, 30 et 32 0/0 de sel, par l'intermédiaire d'une double enveloppe gazeuse, dans un mélange de neige carbonique et d'acétone. J'ai attendu que la température fixe de la solidification finissante soit établie depuis un certain temps, et j'ai alors prélevé la solution en la séparant des cristaux qui la remplissent à l'aide d'une pipette en verre mince dont l'extrémité élargie était fermée par un petit tampon de coton de verre. En attendant, pour faire ce prélèvement, que la pipette ait pris la température du milieu, j'ai pu obtenir, avec six expériences, une moyenne de 30,7 pour la concentration du mélange eutectique.

31,2
30,5
30,9
30,8 } moy. 30,7.
30,7
30,4

Cette composition est très voisine de celle indiquée par M. de Coppet, mais elle en diffère par la température, j'ai trouvé — 21°,3, tandis que M. de Coppet avait donné — 23°,6.

J'ai déterminé, d'autre part, les abaissements suivants du point de congélation :

— 6°,6	11 0/0
— 9 ,25	15
— 12 ,7	20
— 16° 2/3	25

Ainsi que la solubilité de l'hydrate. $NaCl,2H^2O$ à — 12° 1/4, soit 32,9.

En y joignant les abaissements connus fournis pour les solutions étendues :

— 3°,42	5,85 (Raoult)
— 2 ,86	4,9 (Kahlenberg)
— 0 ,80	1,37 (Biltz)
— 0 ,4	0,69 (Raoult)

ainsi que les solubilités de $NaCl,2H^2O$ de M. de Coppet :

— 14°	32,5
— 6°,25	34,22

j'ai pu construire la courbe de fusibilité, qui comprend trois branches correspondant aux équilibres de la phase liquide avec les trois phases solides, glace, sel hydraté, sel anhydre.

Parmi les nombreuses conséquences que l'on peut déduire de la considération de cette courbe d'équilibre, je voudrais appeler l'attention sur son utilisation pour résoudre d'une façon mathématique le problème de la fusion de la neige par addition de sel marin.

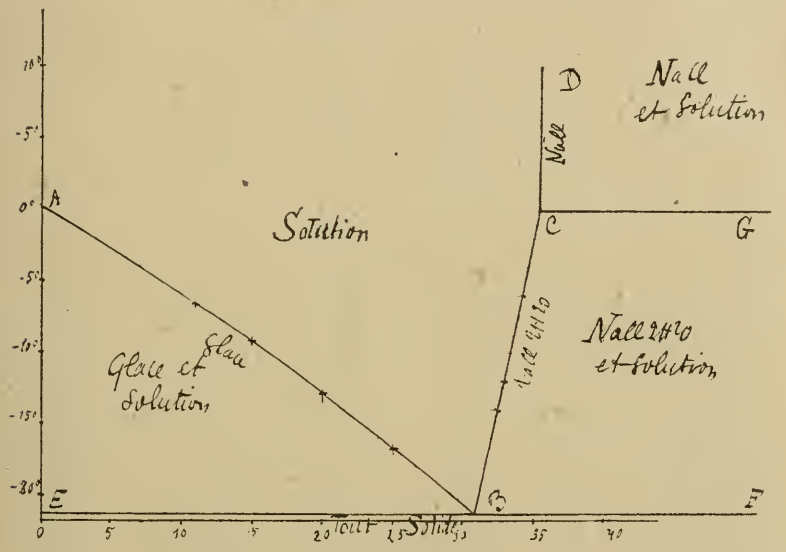
La quantité de sel à ajouter à la neige pour l'amener à fusion augmente avec l'abaissement de température. La courbe AB nous donne les quantités minima de sel à ajouter à 100 parties de neige ayant une certaine température pour en faire un système entièrement liquide.

— 1°	1,8	— 12°	19,0
— 2°	3,65	— 13°	20,4
— 3°	5,25	— 14°	21,7
— 4°	6,8	— 15°	23,0
— 5°	8,4	— 16°	24,2
— 6°	10,0	— 17°	25,4
— 7°	11,6	— 18°	26,7
— 8°	13,1	— 19°	27,9
— 9°	14,6	— 20°	29,1
— 10°	16,1	— 21°	30,4
— 11°	17,5	— 21°,3	30,7

Au-dessous de — 21°,3, il n'existe à l'état stable aucun mélange d'eau et de sel marin susceptible de rester liquide.

Considérons une neige maintenue dans une atmosphère où la température reste constante et égale à — 5°. Si nous voulons l'amener entièrement à l'état liquide, il faudra lui ajouter au minimum 8,4 parties de sel pour 100 de neige.

Dans la pratique, on ne se préoccupe pas de former un système entièrement liquide, on se contente de fondre une partie de la neige dans laquelle se délaie la partie restée solide en formant une boue qui en rend la conduite à l'égout plus commode. Supposons toujours que la température antérieure soit de 5° au-dessous de zéro ; projetons à la surface de cette neige une quantité de sel représentant par exemple 2 parties de sel pour 100 de neige. Que va-t-il se passer? La neige et le sel solide ne sont pas en équilibre à cette température,



ils vont donc se dissoudre réciproquement, mais ce phénomène simultané est un phénomène endothermique ; la température s'abaisse donc progressivement et tend vers — 21°,3. Les influences extérieures réchauffent ensuite la partie liquide formée et la ramènent à — 5° ; alors la solution est en équilibre avec la neige non fondue, sa composition est donc de 8,4 parties de sel pour 100 de neige. On en conclut aussitôt que les 2 parties de neige pour former le mélange précédent ont amené à fusion $\frac{100 \times 2}{8,4} = 23,8$ parties de neige sur 100 ; il en reste donc 76,2 parties à l'état solide.

On voit par cet exemple comment il est possible de prévoir rigoureusement l'état final d'un système donné sel et neige quand on connaît la température extérieure.

On peut se demander s'il n'y aurait pas quelque sel susceptible de remplacer avantageusement le sel marin. Le chlorure de calcium, produit résiduel de grande industrie, concentré et desséché dans des conditions économiques, comme on le fait, par exemple, pour les vinasses de betteraves, pourrait peut-être se substituer au sel marin. Il permettrait en tout cas de se débarrasser de la neige par fusion dans les pays où la température s'abaisse au-dessous de — 21°. Avec le chlorure de calcium, en effet, on peut fondre une neige dont la température atteint jusqu'à — 55°.

UTILITÉ DE LA MÉTHODE GRAPHIQUE DANS L'ÉTUDE DES INSTRUMENTS DE MUSIQUE ANCIENS;

Par M. MARAGE.

J'ai eu l'occasion d'étudier quelques instruments de musique anciens venant du Pérou. Certains d'entre eux avaient été classés comme appartenant à la période précolombienne. J'ai pensé qu'il serait intéressant de déterminer, au moyen de la méthode graphique, les notes rendues par ces appareils; on connaît en effet suffisamment, à l'heure actuelle, l'histoire des diverses gammes pour que l'on puisse dire, d'après les notes qu'il donne, si un instrument est ancien ou moderne.

Expériences. — J'ai inscrit les vibrations au moyen de l'appareil qui m'a servi pour photographier les vibrations de la voix (1).

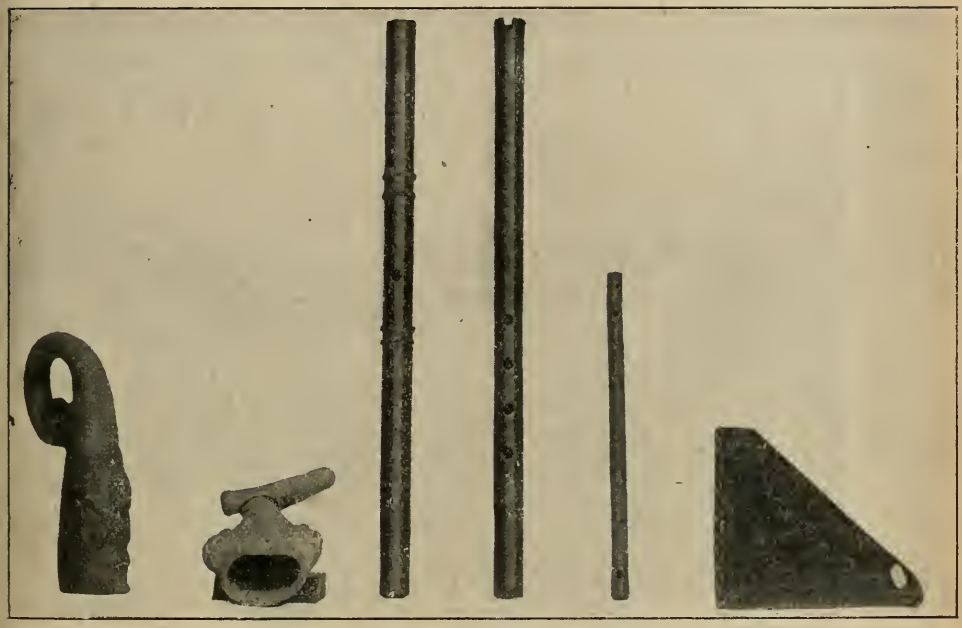
Résultats. — 1° *Trompes en terre* (collection Berthon). — Elles proviennent de Trujillo, au nord de Lima. Leur pavillon a la forme d'une bouche entr'ouverte. Elles donnent une sorte de beuglement qui produit sur l'oreille la sensation de la voyelle EU; graphiquement, on retrouve un tracé à deux périodes qui rappelle beaucoup celui de cette voyelle; il est irrégulier, car le son est loin d'être harmonieux; la note fondamentale pour l'une des trompes est si_2 à + 13 vibrations près; pour l'autre, sol_2 à — 6 vibrations près; ces trompes sont donc des instruments de musique très imparfaits; il n'y a aucune raison d'acoustique qui empêche de les rattacher à la période précolombienne;

(1) M. Maurice Emmanuel et M. Lafleurance, premier flûtiste à l'Opéra, ont fait les mêmes déterminations avec l'oreille; les résultats ont toujours été concordants.

2° *Flûte de Pan* (collection Berthon). — Elle provient de Nacca, au sud de Lima; elle est en terre cuite vernissée et composée de douze tuyaux fermés à une extrémité; ils sont d'inégale longueur et d'inégal diamètre; les longueurs sont, en centimètres :

23 — 18,2 — 14,5 — 11,5 — 10,5 — 8,3 — 6,6 — 5,3 — 5,2 — 4,5 — 4,3 — 4.

L'embouchure de ces tuyaux est elliptique pour le plus long, les



axes de ces embouchures ont 1 centimètre et $0^{cm},7$; pour le plus petit, $0^{cm},8$ et $0^{cm},6$.

Les notes sont les suivantes :

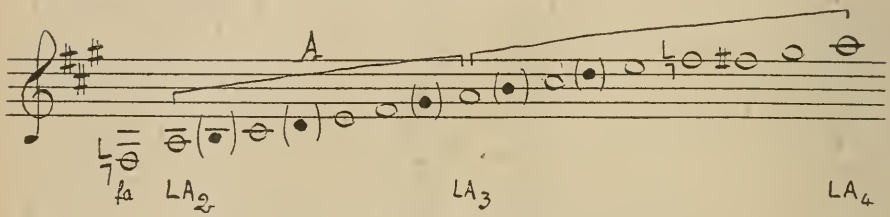
$$fa_2 \quad la_2 \quad ut\sharp_3 \quad mi_3 \quad fa\sharp_3$$
$$la_3 \quad ut\sharp_4 \quad mi_4 \quad fa_4 \quad fa\sharp_4 \quad sol\sharp_4$$

Nous n'avons ici que onze notes parce que le dernier tuyau était cassé en partie. Comme M. Maurice Emmanuel pensait que l'on se trouvait en présence de deux gammes défectives, $la_2 — la_3$; $la_3 — (la_4)$ allongées au grave d'une tierce majeure, correspondant à certaines formules mélodiques, j'ai fait refaire le dernier tuyau sur les

dimensions indiquées par ce qui restait du tube primitif : or, on a obtenu en effet un la_4.

Les notes sont assez justes ; par exemple, nous trouvons $fa\sharp_3$, 367 v.d. ; la_3, 434 v.d. ; $ut\sharp_4$ 568 v.d. ; fa_4, 693 v.d. ; mi_4, 660 v.d. ; la_4, 858 v.d. ; etc...

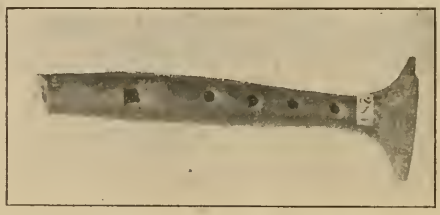
L'échelle de cette flûte de Pan (syrinx) peut donc être considérée comme une variante, dans le ton de *la*, à la fois défective et chromatique de l'échelle diatonique spécifiée plus loin, le chromatique étant réservé à la gamme la plus aiguë (1).



Gammes données par la flûte de Pan ; les notes en noir manquent

Comme il paraît absolument certain que la quinte est le facteur le plus universellement employé dans la construction des gammes hindo-européennes, il n'y a rien d'invraisemblable à retrouver en Amérique, à l'époque précolombienne, les gammes que nous venons d'étudier.

Il y a probablement hasard pour le la_3 à 434 ; mais la construction de l'échelle de la flûte de Pan dépend d'une loi de pratique générale qui ne paraît pas due au hasard seul.



3° *Chirimia* (collection Cesbron). — C'est un petit flageolet en terre cuite de 20 centimètres de hauteur ; sur l'instrument actuel, il

(1) Le demi-ton chromatique existe entre les deux formes d'un même degré (*fa*, *fa* $\sharp$: *ut*, *ut* $\sharp$). Le demi-ton diatonique existe entre deux degrés différents (*mi*, *fa* ; *si*, *ut*).

Certaines mélodies de la tétralogie de Wagner sont construites sur une gamme défective analogue à la gamme de l'octave A, *les Filles du Rhin* et *l'Oiseau* notamment.

manque une partie de l'embouchure; on en a trouvé de semblables dans des fouilles faites au Pérou et au Mexique ; les Aztèques l'appelaient *Uilacapitzli*.

Il donne des notes voisines de : $ré\flat_5$; $mi\flat_5$; fa_5 ; sol_5 ; la_5.

C'est une sixte divisée en cinq tons maximes ($^8/_7$ mal calibrés.

Il n'y a, comme pour le précédent, aucune raison acoustique empêchant cet instrument d'être authentique.

4° *Flûtes.* — Elles ont été trouvées dans un tombeau à Pachacamac, aux environs de Lima. Nous avons deux sortes d'instruments :

a) *Une petite flûte traversière.* — Elle a 29 centimètres de longueur et 1 centimètre de diamètre ; elle est faite d'un roseau fermé à une extrémité et percés de trois trous latéraux ; l'un deux sert d'embouchure.

Les notes fondamentales sont les suivantes :

$$ré\flat_3 \qquad ré_3 \qquad mi\flat_3$$

On peut obtenir également en variant l'énergie de l'air insufflé :

$$ré\flat_4 \qquad ré_4 \qquad mi\flat_4$$
$$la\flat_4 \qquad la_4 \qquad si\flat_4$$

Cette flûte peut appartenir à l'époque incasique.

b) *Deux grandes flûtes* absolument semblables entre elles. Elles ont 51 centimètres de longueur et $2^{cm},5$ de diamètre intérieur et sont formées d'un tube cylindrique en bois, ouvert à chaque extrémité et percé de six trous; l'une des extrémités, qui sert d'embouchure, porte une simple encoche rectangulaire dont la base est taillée en biseau.

Ces flûtes donnent toutes deux exactement les mêmes notes; ce sont les suivantes :

$$ré_3 \quad mi_3 \quad fa\sharp_3 \quad sol_3 \quad la_3 \quad si_3 \quad ut\sharp_4$$

C'est notre gamme diatonique actuelle en *ré*, et les notes de cette flûte primitive sont aussi justes que celles des flûtes dont on se sert actuellement à l'Opéra. Le *la* a exactement 435 vibrations pour l'un des instruments et 440 pour l'autre.

Or, à Paris, le la_3 avait, en 1700, 405 v. d. ; en 1855, il valait 448 en Italie et 455 à Londres ; et ce n'est qu'en 1859 que l'on est convenu d'adopter en France 435. De plus, cette gamme, avec ses intervalles,

semble absolument anormale à l'époque précolombienne. Il me paraît donc qu'il serait prudent de faire les plus expresses réserves sur l'antiquité de ces deux derniers instruments.

Conclusions. — Je pense que la méthode graphique, dans laquelle j'ai remplacé le levier rigide de Marey par un rayon lumineux, peut être très utile dans l'étude des instruments de musique anciens.

En employant ce procédé, il sera souvent possible d'échapper à certaines erreurs, qu'un archéologue a parfois beaucoup de peine à éviter.

LES VOYELLES LARYNGIENNES;

Par M. MARAGE.

D'après Helmholtz, les cordes vocales agissent comme des anches membraneuses qui donnent en vibrant une note fondamentale accompagnée d'une assez longue série d'harmoniques : un de ces harmoniques se trouve renforcé par la cavité buccale (vocable), et l'union de la note fondamentale laryngienne avec la vocable constitue la voyelle : il s'ensuit que la vocable et par conséquent la cavité buccale sont indispensables pour faire les voyelles OU, O, A, É, I.

Or cette hypothèse n'est pas exacte, et le larynx à lui seul peut les former.

Pour le prouver, il suffit de remplir complètement la bouche avec du *stents* (1), en ménageant simplement au milieu de cette substance un conduit cylindrique qui continue la trachée; le nez est bouché, de telle sorte que l'appareil en expérience se compose des poumons, du larynx, du pharynx et d'un tube cylindrique indéformable de 2 centimètres de diamètre aboutissant à l'extérieur : les lèvres, les dents, la langue, les joues complètement emprisonnés par le *stents* ne peuvent pas changer de position, et la cavité buccale, en tant que résonateur, est annulée.

Or, dans ces conditions, on peut parfaitement reproduire les cinq voyelles précédentes; non seulement on les reconnaît à l'oreille, mais encore elles donnent les mêmes tracés que ceux qui ont été obtenus avec la sirène dont je me suis servi pour faire la synthèse de ces mêmes

(1) Le *stents* est le produit dont se servent les dentistes pour prendre les empreintes des dents, il est dur à la température ordinaire et tout à fait mou vers 40°.

sons : OU, O, A, É, peuvent être faits sur les notes graves ou aiguës, mais I n'est réellement bon que sur une note aiguë.

Cette expérience confirme donc la définition que j'avais donnée en 1898 : la voyelle est une vibration aéro-laryngienne intermittente. La cavité buccale ne sert qu'à la renforcer ou à la transformer (*Comptes rendus*, novembre 1908), et comme il n'y a pas deux bouches pareilles, on obtient pour une même voyelle autant de tracés qu'il y a de chanteurs différents, si l'on inscrit toutes les vibrations donnant le timbre spécial de chaque voix.

Il reste maintenant à déterminer expérimentalement l'endroit du larynx où se produit cette vibration intermittente; ce sera, je l'espère, le sujet d'une prochaine communication.

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES.

AVIS

Notre collègue, M. Mahler, a pris l'initiative de demander à un artiste de talent, M. Jacques Froment-Meurice, le projet d'une plaquette destinée aux membres de la Société.

Cette plaquette, dont quelques-uns de nos collègues ont déjà vu l'esquisse, aurait 8 centimètres sur 7 centimètres. Chaque exemplaire serait fondu en bronze. A l'avers, une allégorie personnifiant chacune des sections de la Société. Au revers, la place et l'entrée de la Sorbonne, et un motif de combat rappelant notre devise « Étude et Amitié », permettant l'inscription du nom de nos anciens les plus fameux et réservant un emplacement pour le nom du souscripteur.

Avant de pouvoir soumettre à la Société un modèle définitif de la plaquette, il est nécessaire que M. Mahler connaisse le nombre approximatif des souscripteurs éventuels. Nous prions donc ceux de nos collègues qui sont disposés à acquérir la plaquette de donner leur nom au secrétariat. Le prix de la plaquette patinée, finie et signée par l'artiste, serait de 28 francs, à la condition que le nombre d'exemplaires à exécuter atteigne environ le nombre des membres de la Société, le prix de chaque exemplaire dépendant essentiellement du nombre des souscripteurs.

EXTRAITS DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES

Séance du 3 avril 1909

Présidence de M. Matignon, vice-président.

M. Rabaud présente la candidature de M. Rivet à la place vacante dans la 3e section.

M. Matignon expose à la Société l'état actuel de la lutte engagée entre les cuirassements et les projectiles. Il parle de la constitution et de la fabrication des plaques de blindage et des obus à coiffe.

Séance du 8 mai 1909

Présidence de M. Perrin, président.

Le 3e Congrès national des Publicistes se tiendra à Paris du 26 mai au 2 juin. Sont délégués par la Société : MM. Laisant et Berthelot. M. Berthelot étudie la valeur de la résistance de l'air dans l'aviation. Cette communication donne lieu à un intéressant échange d'observations entre divers membres de la Société.

Séance du 22 mai 1909.

Présidence de M. Laisant.

Le 3e section, réunie en comité secret, nomme une commission chargée d'examiner les candidatures à la place vacante dans cette section. En font partie : MM. Lécaillon, Gravier ; Rabaud, rapporteur.

M. Legendre fait une communication sur la composition de l'eau de mer littorale et ses variations, remarquables surtout au point de vue de la teneur en oxygène.

M. Michel étudie la formation de la souche chez les Syllidiens en voie de stolonisation, par la réunion de deux moitiés symétriques d'abord indépendantes.

M. Lemoine fait une communication sur la géologie de la région nord-est de Tombouctou, d'après les documents de la mission Arnaud-Cartier.

Séance du 12 juin 1909.

PRÉSIDENCE DE M. PERRIN, PRÉSIDENT.

M. Rabaud lit son rapport sur les candidatures de MM. Fauré-Frémiet, Rivet, Terroine, à la place vacante dans la troisième section. Il conclut, étant donné la valeur des candidats en présence et les cadres restreints de la section, qu'il y aurait lieu d'augmenter le nombre des correspondants parisiens de la Société. Suit un échange d'observations et le renvoi à la prochaine séance du vote sur cette question.

M. Matignon fait une communication sur la statique chimique des réactions dans lesquelles interviennent un gaz et un ou plusieurs corps solides.

M. Coutière signale quelques particularités de la morphologie des appendices chez les Articulés.

Séance du 26 juin 1909.

PRÉSIDENCE DE M. MATIGNON, VICE-PRÉSIDENT.

M. le Président signale la présence à la séance de M. J. Tur, de Varsovie, membre correspondant de la Société.

M. Rivet est élu membre titulaire dans la 3e section.

L'assemblée décide ensuite, après discussion, que si l'on peut admettre la nomination de correspondants parisiens, il y a lieu de ne le faire que dans des circonstances exceptionnelles et en très petit nombre. MM. Fauré-Frémiet, Semichon, Terroine sont élus à ce titre.

M. P. Lemoine étudie les effets des tremblements de terre qui viennent de sévir en Provence. Il montre comment on peut établir une relation entre la géologie de cette région et la distribution des foyers de troubles sismiques.

STATIQUE DES RÉACTIONS DANS LESQUELLES INTERVIENNENT UN GAZ ET DES SOLIDES;

Par Camille MATIGNON.

J'ai montré, en 1899 (1), que les corps solides, se dissociant en un solide et un gaz, satisfaisaient à la relation suivante (2) : Si l'on désigne par Q la chaleur de combinaison rapportée à une molécule gazeuse à la température absolue T où la pression de dissociation est 760 millimètres (pression normale), on a la relation $\frac{Q}{T} = 0^c,032$ par degré, $\frac{Q}{T}$ est la variation d'entropie pour la réaction s'effectuant à T°.

Il en résulte que les courbes de dissociation de tels systèmes peuvent se déduire de l'une quelconque d'entre elles par la relation

$$\frac{T_A}{T_B} = C^{te};$$

T_A et T_B sont les températures respectives des deux systèmes A et B, pour lesquelles la pression de dissociation est la même (3). Autrement dit ces courbes sont homologues. Ces conséquences sont suffisamment d'accord avec les faits jusque vers 800°.

L'ensemble des relations précédentes ne s'applique pas seulement aux systèmes du type :

$$\text{Solide} + \text{gaz} \rightleftarrows \text{solide};$$

il s'étend avec une approximation suffisante aux systèmes monovariants contenant un gaz et un nombre quelconque de corps solides (4).

Considérons donc le système général monovariant

$$\underset{\text{gaz}}{A} + \underset{\text{sol.}}{B} + \underset{\text{sol.}}{C} \ldots + = \underset{\text{sol.}}{A'} + \underset{\text{sol.}}{B'} + \underset{\text{sol.}}{C'} + \ldots$$

(1) *Comptes Rendus*, t. CXXVIII, p. 103 ; 1899.
(2) Pour l'historique, voyez *Annales Chim. et Phys.* [8], t. XIV, p. 5 ; 1908.
(3) Bouzat, *Annales Chim. et Phys.* [8], t. IV, p. 145; 1905.
(4) Matignon, *Comptes Rendus*, t. CXL, p. 513 ; 1905.

Toutes les courbes de dissociation correspondant à ce système général vont former dans le plan un réseau de courbes homologues se déduisant les unes des autres par la relation :

$$\frac{T_A}{T_B} = C^{te} = \frac{Q_A}{Q_B}$$

et le rapport $\frac{Q}{T}$ pour chacune d'entre elles sera voisin de 0c,032. En fait $\frac{Q}{T}$ n'est peut-être pas tout à fait indépendant de la température et, pour des températures normales de dissociation (1) un peu élevées, il conviendra sans doute d'introduire un terme correctif :

$$\frac{Q}{T} = 0{,}032\,[1 + \alpha\,(T - T_0)].$$

Quoi qu'il en soit, chacune des courbes normales de dissociation du réseau est définie par la valeur Q, qui correspond à sa température.

Examinons maintenant les conditions à remplir pour que le gaz A puisse entrer en combinaison.

La condition nécessaire et suffisante pour que la combinaison soit possible à une certaine température, c'est que la tension de dissociation du système soit inférieure à la tension maxima du liquide ou du solide A. Si donc nous considérons la courbe de tension maxima du gaz, pour que la combinaison de ce dernier soit possible, il faudra que la courbe de dissociation du système soit tout entière au-dessous de la première. L'expérience démontre que les courbes de tension maxima sont plus inclinées sur l'axe des températures que les courbes de dissociation. Comme la courbe de tension maxima commence au point triple pour finir au point critique, on conçoit que la combinaison du gaz pourra se faire à toute température, si la courbe de dissociation est caractérisée par une valeur de Q supérieure à celle de Q_c, qui caractérise la courbe passant au point triple.

Ainsi donc si $Q > Q_c$, la réaction est réversible à toute température.

Si la courbe de dissociation est comprise entre les deux courbes

(1) J'appelle température normale de dissociation, celle qui correspond à la pression normale de dissociation, soit 760 millimètres.

passant par les points triple et critique, elle coupe alors la courbe de tension maxima en un certain point de température T_0, et la réaction n'est plus réversible qu'au-dessous de cette température, Q est alors compris lui-même entre les valeurs Q_c et Q_t relatives aux deux courbes limites :

$$Q_t < Q < Q_c.$$

La courbe qui passe par le point triple n'est autre chose que la courbe de sublimation du solide A et la valeur Q_t est la chaleur de sublimation du solide A, à la température normale de sublimation; on peut remplacer approximativement Q_t par la somme des chaleurs de fusion et de volatilisation $L + S$:

$$L + S < Q < Q_c.$$

Enfin, si

$$Q < Q_t$$

ou

$$Q < L + S,$$

le gaz ne peut plus se combiner, la réaction est toujours irréversible.

Ainsi, c'est de la connaissance des propriétés physiques du gaz que nous déduisons les conditions de réversibilité de la réaction.

Enfin, il est à remarquer que la réaction générale précédente est toujours possible dans le sens du dégagement gazeux.

En résumé, les réactions chimiques dans lequelles interviennent un gaz et des solides se partagent, d'après l'ordre de grandeur de la quantité de chaleur qu'elles mettent en jeu, en trois catégories, les réactions réversibles à toute température, les réactions partiellement réversibles et les réactions irréversibles.

J'ai calculé pour un certain nombre de gaz les valeurs limites de $L + S$ et de Q_c :

	$L + S$	Q_c	
Az^2	2c,36	3c,43	
Az^2O	5 ,55	8 ,26	
H^2O	11 ,2	16 ,15	
HCl	5 ,67	8 ,5	
H^2S	6	9 ,7	etc.

Ces valeurs fixent d'une façon approximative, pour chaque gaz, les quantités de chaleur qui limitent les trois catégories de réac-

tions. Elles auront sans doute besoin d'être légèrement modifiées, si la constante de $\frac{Q}{T}$ n'est pas rigoureuse; mais, quoi qu'il arrive, les écarts avec les nombres précédents seront assez faibles.

Je voudrais montrer quelques vérifications.

I. Soit l'action du gaz chlorhydrique sur le sulfate de cadmium :

$$(n+1)\underset{\text{sol.}}{SO^4Cd} + 2H\underset{\text{gaz}}{Cl} = \underset{\text{sol.}}{SO^4H^2.nSO^4Cd} + \underset{\text{sol.}}{CdCl^2} + 22^c,9 + \varepsilon;$$

l'acide sulfurique forme avec le sulfate de cadmium un sulfate acide solide dont la chaleur de formation à partir des générateurs solides est certainement très faible ε. On a donc par molécule de gaz chlorhydrique :

$$\frac{22^c,9 + \varepsilon}{2} = 11^c,45 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En admettant $11^c,45$, on en déduit pour la température normale de dissociation :

$$\frac{11,45}{0,032} = 357^\circ \text{ absolus, soit } 84^\circ \text{ C.}$$

Il n'est pas douteux que ε doit être compris entre 2 et 4 calories, 4 calories étant certainement une valeur maxima; si nous admettons la moyenne 3 calories, $\frac{\varepsilon}{2} = 1^c,5$, on en déduit :

$$\frac{12,9}{0,032} = 400^\circ \text{ absolus ou } 127^\circ \text{ C.}$$

J'ai étudié la dissociation du système, et j'ai trouvé comme température normale 121°.

II. Soit de même l'action de l'acide chlorhydrique sur le sulfate de zinc :

$$2HCl + (n+1)\,SO^4Zn = ZnCl^2 + SO^4H^2nSO^4Zn + 16^c,9 + \varepsilon;$$

la chaleur dégagée par HCl est :

$$\frac{16,9 + \varepsilon}{2} = 8,45 + \frac{\varepsilon}{2};$$

donc la réaction doit être possible et réversible

J'ai constaté : 1° que le gaz HCl n'est pas absorbé vers 20° par le sulfate de zinc ; 2° que l'absorption est très nette à la température cryohydratique du mélange glace et sel marin; 3° que la tension de dissociation à 0° est voisine de 38 centimètres. J'en ai déduit pour la température normale de dissociation + 12°,3.

Or 8°,45 donne — 9°; c'est un minimum, auquel il faut ajouter un supplément, correspondant à $\frac{\varepsilon}{2}$.

La concordance est donc bonne.

III. J'indiquerai en dernier lieu l'action du gaz sulfhydrique sur les carbonates de potassium et de sodium :

$$\underset{\text{sol.}}{CO^3K^2} + \underset{\text{gaz}}{H^2S} = \underset{\text{sol.}}{CO^3KH} + KSH + 14^{cal},2,$$

$$\underset{\text{sol.}}{CO^3Na^2} + \underset{\text{gaz}}{H^2S} = \underset{\text{sol.}}{CO^3NaH} + NaSH + 7^{cal},8.$$

Pour le gaz H^2S, les deux limites sont 6 calories et 9°,7.

Comme conclusion, le carbonate de potassium doit absorber H^2S à la température ordinaire sous la pression atmosphérique, car la température de dissociation normale doit être voisine de 170°, tandis que la deuxième réaction n'est pas possible dans les mêmes conditions, la température normale de dissociation étant à — 33°.

Cette deuxième réaction ne doit être réversible qu'au-dessous d'une certaine température. J'ai reconnu, en étudiant le point de rencontre de la courbe de tension maxima du liquide sulfhydrique et de la courbe de dissociation prévue, que ce point était bien au-dessus de la température ordinaire. Comme conclusion, la réaction doit se produire en mettant le solide en contact avec le liquide sulfhydrique à la température ordinaire. C'est ce que j'ai vérifié.

SUR LE PEU D'IMPORTANCE SYSTÉMATIQUE DU CARACTÈRE TIRÉ DE LA PRÉSENCE OU DE L'ABSENCE DU FORAMEN SUS-ÉPICONDYLIEN;

Par A. MÉNÉGAUX.

L'étude du foramen sus-épicondylien est des plus intéressantes, car, en montrant l'extrême variabilité de son apparition, elle permet de ramener à sa juste valeur un caractère auquel certains anatomistes ont voulu attribuer une grande importance systématique. En effet, une pareille étude permet de constater que, dans tous les grands groupes, on trouve toujours quelques exceptions constituées par divers genres dans lesquels toutes les espèces ne se comportent pas de même à ce point de vue, c'est-à-dire que des espèces très voisines possèdent cette perforation à l'humérus ou bien n'en ont pas. Parfois, sans qu'on puisse en entrevoir la raison, il en est ainsi pour les individus d'une même espèce ou même pour les deux humérus d'un même animal, comme je le rappellerai plusieurs fois au cours de cette étude. D'ailleurs il est à prévoir que lorsque les données paléontologiques et ostéologiques seront plus nombreuses, les exceptions qui nous paraissent anormales se multiplieront encore.

D'après Schlosser, les Mammifères marins manquent de trou sus-épicondylien, ainsi que de perforation à la fossette olécrânienne. Les Siréniens présentent une certaine analogie avec les Solipèdes et les Pinnipèdes avec les Carnivores.

En effet Stromer n'a pas vu ce foramen sur un Morse (*Trichechus*) et sur trois exemplaires d'Otarie. Je ne l'ai vu ni chez *Trichechus rosmarus* L., ni chez l'Otarie à crinière (*Otaria jubata* Forster) et chez l'Otarie ourson [*Arctocephalus ursinus* (L.)].

Dans le groupe des Phoques, pas de règle. Ainsi Stromer le trouve chez deux « Phoques du Groenland » [*Phoca groenlandica* (Fabr.)] où je l'ai vu aussi, ainsi que sur *Ph. hispida* Schreb., et Flower chez le Phoque commun (*Phoca vitulina* L.) où il est parfois incomplètement limité ou bien manque, comme je l'ai constaté. Mais d'autre part, il n'existe pas chez le Macrorhine léonin [*Macrorhinus leoninus* (L)].

Chez *Phoca monachus* [*Monachus albiventer* (Bodd.)], il existe d'après Cuvier et manque suivant de Blainville; donc sa présence est irrégulière. En effet j'ai pu constater que, sur un spécimen, il

n'existait pas, tandis que, sur un autre, l'humérus *gauche* seul en était pourvu. Chez *Halichœrus grypus* (Fabr.), Grüber a signalé un large canal chez un jeune, tandis que sur un vieil adulte, ce canal qui existait encore à droite se réduisait à gauche à une simple échancrure. Par contre la disparition est constante, d'après Flower, Giebel et Grüber, chez les Cétacés et les Siréniens. Les Cétacés présentent d'ailleurs une réduction frappante de toute la portion inférieure de l'humérus. Je n'ai trouvé ce foramen ni chez les Baleines, ni chez la Rhytine de Steller [*Hydrodamalis Stelleri* (Retzius)] ni chez le Plataniste du Gange, etc.

Chez les Mammifères terrestres, ce foramen s'est conservé dans la plupart des groupes, sauf chez les Chiroptères et les Ongulés actuels.

Chez les Monotrêmes, dont l'humérus est court, fort et élargi en avant, il existe, mais presque au milieu de la longueur de l'os (Cuvier). Outre l'Echidné et l'Ornithorynque, il existe aussi chez *Proechidna brujnii* (Pet. et Doria).

Chez les Marsupiaux on le rencontre aussi bien chez les Polyprotodontes que chez les Diprotodontes. Parmi les premiers, il est déjà inconstant chez les Dasyuridés et les Didelphidés où, chez ces derniers, il y a coexistence de la perforation intercondylienne.

Grüber assure qu'il manque chez *Thylacinus* et *Dasyurus*; pas toujours pourtant, puisque Stromer l'a vu sur deux spécimens de *Thylacinus cynocephalus* (Harris), et que Waterhouse le signale sur un humérus de *Sarcophilus satanicus* (Harris) et pas sur l'autre. En effet j'ai constaté sa présence chez *Thylacinus cynocephalus* (Harris), chez *Sarcophilus satanicus* Thomas, chez *Perameles nasuta* Geoff, et chez *Didelphis marsupialis* L. D'après Lyddekker, il n'existe pas dans le genre *Dasyurus;* en effet je ne l'ai pas trouvé chez *Dasyurus maculatus* Kerr.

Ce foramen manque sur le genre fossile *Diprotodon;* mais pourtant Grüber l'a vu chez divers animaux du groupe des Diprotodontes comme les Kangourous, entre autres chez *Macropus giganteus* Zimm et chez *Macropus* (*Halmaturus*) *ruficollis bennetti* Waterh. de Tasmanie, sur l'humérus duquel j'ai constaté aussi la présence d'un gros trou limité par une très fine arcade osseuse. En outre, d'après Stromer, sur un deuxième spécimen de cette dernière espèce, il n'existait pas, mais par contre il était indiqué chez *Macropus* (*Thylogale*) *derbyanus* (Gray). De plus le même auteur l'a vu « chez trois exemplaires de *Phalangista* Cuv. », et pourtant Grüber nie son existence chez *Phalangista Cooki* [*Pseudochirus Cooki* (Desm.)], et

chez *Petaurus sciureus* Shaw qui faisait aussi partie du genre *Phalangista*, cette dernière espèce possédant une forte échancrure en lieu et place du foramen.

Ce foramen existe encore, sans perforation intercondylienne, sur la forme typique *Macropus ruficollis* Desm. et chez *Phascolarctos* (*Ph. cinereus* Goldf.), chez *Phalanger* [*Ph. orientalis* (Pallas)], chez *Trichosurus* [*E. vulpecula* (Kerr.)], chez *Petauroides* (*P. volans* Kerr), chez *Phascolomys* (*Ph. ursinus* Shaw), chez *Macropus* (*Thylogale*) *eugenii* Desm. et *billardierei* Desm. Et pourtant Grüber a montré que *Tarsipes spencerae* Gray n'en possède pas, et je n'en ai pas trouvé sur l'humérus de *Bettongia cuniculus* Ogilby.

Dans l'ordre des Edentés qui ne présente aucune unité dans son ensemble, car il est formé de groupes plus ou moins parents accolés dans les classifications modernes, la variabilité dans l'apparition du trou sus-épicondylien n'est pas moindre.

Ainsi ce foramen existe chez *Orycteropus*, *Chlamydophorus*, chez *Tatusia*, *Manis*, chez les Myrmécophagidés, et pourtant l'espèce de l'Afrique occidentale et méridionale *Manis* (*Pholidotus*) *Temmincki* Smuts (Weber, 1904, p. 424) n'en possède pas. J'en ai constaté la présence chez *Priodontes giganteus* (E. Geoff.). Schlosser dit que quelques Edentés l'ont perdu, entre autres *Myrmecophaga*. Je l'ai vu chez *Myrmecophaga tridactyla* (L.), où il est très large et continue une large gouttière. En outre, je l'ai vu, et Cuvier l'avait déjà signalé, chez *Tamandua tetradactyla* (L.) et Meckel (1819) chez *Cyclopes didactylus* (L.). Chez les Bradypodidés, le genre *Bradypus* en est dépourvu — sauf l'espèce *Br. torquatus* (Ill.), comme Wagner l'a montré, sans que la largeur et la grosseur de l'humérus expliquent cette différence —, tandis que le genre très voisin *Cholœpus* [*Ch. didactylus* (L.)], et *Ch. hoffmanni* Peters) [1] en possède un.

Chez les Gravigrades anciens comme *Hapalops*, *Eucholœops*, il existe, ainsi que chez *Nothrotherium* (*Cœlodon*), *Scelidotherium*, *Megalonyx*, tandis qu'il manque chez *Mylodon* et *Megatherium*, où pourtant l'humérus est énorme et trapu.

Des Gravigrades dérivent les Myrmécophagidés, ainsi que les Bradypodidés dont la généalogie est encore à fixer, car il faut attendre pour préciser dans quelle mesure les *Protobradydæ* d'Ameghino sont les précurseurs des Bradypodidés. L'apparition du troisième

[1] M. Matschie de Berlin a bien voulu me renseigner à ce sujet : « In unserer Sammlung befindet sich das Skelet eines der Original-Exemplare von *Cholœpus hoffmanni*, er hat am Humerus ein grosses foramen entepicondyloïdeum. »

trochanter est de même si inconstante qu'on ne peut y trouver un caractère d'ancienneté.

D'après Zittel et Weber, il est presque toujours présent chez les Condylarthres, ainsi que chez les Typothériidés ; mais il disparaît chez les Toxodontidés.

Chez les Amblypodes, des trois sous-ordres, les *Pantopoda* et les *Dinocerata* n'en possèdent pas, tandis que dans celui de *Taligrada*, *Pantolambda bathmodon* Cope en est pourvu.

Enfin il manque toujours chez les Ongulés vrais actuels (Artiodactyles et Périssodactyles) qui sont pourvus d'une fossette olécrânienne perforée, et probablement aussi chez les fossiles (Flower, Giebel, Zittel).

Il en est de même chez les Proboscidiens, ainsi que dans le genre *Hyrax*, d'après Schlosser et Weber (p. 708), et comme j'ai pu le constater sur un spécimen de *H.* (*Dendrohyrax*) *dorsalis* Fraser venant du Dahomey. Cette espèce possède aussi une perforation de la fossette olécrânienne, comme les Ongulés.

Chez les Galéopithèques et chez presque tous les Insectivores vrais, ce foramen s'est conservé, comme Dobson le fait remarquer, ordinairement sans perforation intercondylienne. Pourtant il signale son absence chez *Potamogale* (*P. velox* du Chaillu), comme je puis le faire chez *Geogale* (*G. aurita* A. M. Edw. et Grand). Il existe aussi chez *Anurosorex* (*A. squamipes* A. M. Edw.), chez *Limnogale* (*L. mergulus* F. Major) où l'humérus est élargi. A propos du genre *Erinaceus*, les données sont contradictoires. D'après Dobson, beaucoup de spécimens d'*Erinaceus europæus* L. et d'*E. collaris* Gray n'en possèdent pas ; mais diverses espèces du même genre telles que *aurita* (Gm.), *algirus* Duvernoy, *deserti* Loche, *æthiopicus* Ehrenb. en sont pourvus.

La taupe ordinaire (*Talpa europaea* L.), le possède ; je l'ai retrouvé chez *Talpa* (*Mogera*) *wogura* Tem. du Japon.

Chez les Centétidés, il existe avec une perforation de la fossette olécrânienne. Cette dernière n'existe pas chez *Potamogale*, *Chrysochloris* et *Crocidura* (*C. albicauda Peters*). D'après Giebel, il manque chez les Gymnures de la Malaisie, et pourtant Dobson et Stromer l'ont constaté chez *Gymnura gymnura* Raff. sans perforation de la fossette olécrânienne.

Jamais on ne l'a observé chez les Chiroptères, pas plus que la perforation intercondylienne (Baur, Flower, Giebel, Schlosser), et pourtant le condyle est assez développé.

On admet que ce foramen manque chez les plus récents types de Rongeurs, les Lagomorphes et les Myomorphes, deux groupes qui peuvent avoir aussi une perforation intercondylienne.

Parmi les autres groupes, peu de genres ont été étudiés à ce point de vue ; mais, d'après Weber, chez divers genres, comme *Sciurus*, *Cricetus*, *Hesperomys*, etc., l'humérus, sans règle aucune, est pourvu ou dépourvu d'un trou sus-épicondylien : « Der Humerus hat ohne jede Regel bei verschiedenen Arten, wie *Sciurus*, *Cricetus*, *Hesperomys*, etc., ein Foramen entepicondyloïdeum » (Weber, *die Säugethiere*, p. 476). Ce foramen n'existe pas, et parfois la perforation intercondylienne, chez *Lepus* (arctique, commun, domestique, lapin sauvage), chez *Cavia* (*C.*) *cutleri* Bennet, *C. porcellus* (L.), chez *Dolichotis patagonicus* (Shaw), chez *Viscacia viscacia* Molina, chez *Hystrix cristatus* L., chez les Cœndous, chez *Bathyergus maritimus* Gm., ainsi que chez *Agoutipaca* (L.) *Lagidium peruanum* (Meyen), chez *Castor Fiber* L. On le retrouve chez *Marmotta marmotta* (L.), *Sciuropterus volans* L., où il est très petit, chez *Sciurus vulgaris* L. et *niger* L., chez *Ratufa indica* Erxl. et chez *Xerus getulus* Gesner. Enfin, dans la famille des Muridés et la sous-famille des Nésomyinés, chez des espèces rares provenant de Madagascar, j'ai pu constater une grande diversité. Ainsi le foramen supracondylien manque, de même que la perforation intercondylienne, chez *Brachyuromys* (*B. betsileonensis* Bartl. et *B. ramirohitra* Major), chez *Macrotanomys* (*M. bastardi* A. M. Edw. et Grand), chez *Gymnuromys* (*G. roberti* Major). Le trou susépicondylien existe, sans perforation de la fossette olécrânienne, chez *Brachytarsomys* (*B. albicauda* Günther) et chez *Eliurus* (*E. myoxinus* A. M. Edw. et *E. majori* Thomas), tandis que chez *Hypogeomys* (*H. antimena* A. Grand.) un gros foramen est accompagné d'une perforation de la fossette intercondylienne.

Il existe aussi chez *Gerbillus afer* Gray et chez *Pteromys oral* Tickell et, comme Gervais l'a montré, chez *Anomalurus peli* Tem.

On le signale aussi dans le groupe des Créodontes, les ancêtres des Carnivores, où sa présence paraît être la règle ; pourtant s'il manque chez *Mesonyx* d'après Scott et Zittel, il existe, d'après Cope, chez l'espèce voisine *Pachyæna ossifraga* Cope.

Chez les Carnivores et dans la plupart des genres, son apparition ne paraît soumise à aucune règle.

On admet généralement qu'il existe, mais qu'il est petit, chez les Félidés actuels ; pourtant son absence a été constatée chez *Smilodon*, et, chez *Felis domestica* Briss, où il existe normalement, Struthers a signalé une fois son absence d'un seul côté. Chez *Felis* (*Catopuma*) *temmincki*. Vig. et Horsf. du Thibet, il est assez gros, et chez le Fosa de Madagascar (*Cryptoprocta ferox* Bennett), il est énorme.

Les Canidés et les Hyaenidés, qui ont une perforation intercondy-

lienne, ne possèdent pas normalement de foramen entépicondyloïdeum, et pourtant Gaudry l'a constaté chez *Hyæna eximia* Roth. et Wagner, et d'après Zittel,il est la règle chez les Canidés fossiles.

Stromer en a vu une indication chez *Hyæna hyæna* (L.),et j'ai constaté son absence chez *Proteles cristatus* (Sparrm).

On sait qu'il existe chez *Procyon* (sur *P. cancrivorus* G. Cuv., il manquait sur l'humérus de gauche), chez *Potos flavus* Schreb., chez *Nasua* et chez *Ailurus* (*A. fulgens* F. Cuv.), etc.

Il n'existe pas, comme la perforation de la fossette olécrânienne, chez beaucoup d'espèces du genre *Ursus*, et pourtant on le trouve sur l'humérus de l'Ours des Cordillières (*Ursus ornatus* F. Cuv., mais il est petit), et même parfois chez *U. spelaeus* Rosenm, comme l'a fait remarquer Blainville. Il n'existe pas chez *U. arctos* L. et, malgré cela, Stromer le signale sur un humérus gauche d'un spécimen de cette dernière espèce.Chez l'Ours malais [*Ursus* (*Helarctos*) *malayanus* Raffles] et chez l'Ours jongleur [*Melursus ursinus* (Shaw)], il manque, de même que la perforation intercondylienne. Ce foramen existe, mais il est petit, chez l'Ours du père David (*Ailuropus melanoleucus* A. M. Edw.) où l'humérus est très large, mais manque de perforation olécrânienne.

Il manque chez beaucoup de Mustélidés, comme chez *Mephitis mephitica* (Shaw), *M. mesomelas* Lcht., et paraît être constant Chez les Gloutons, les Loutres [*Lutra lutra* (L.), *L. brasiliensis* Zimm., etc., *Lataxlutris* (L.)].

Chez les Viverridés, il est plus souvent présent qu'absent. Il existe chez la Civette, Gaudry le signale chez *Ictitherium;* chez *Eupleres goudoti* Doyère, Gervais admet normalement son existence, tandis que Schlosser assure qu'il manque toujours, mais il y a constaté la perforation de la fossette olécrânienne.

Giebel l'a signalé une fois d'un seul côté chez *Genetta genetta* (L.). Chez *Galidictis vittata* Gray, il manque ainsi que la perforation olécrânienne, tandis que chez la Fossané de Madagascar [*Fossa fossa* Schreb.)], il existe avec la perforation intercondylienne. D'après de Blainville, il manque chez *Cynogale bennetti* Gray.

On le retrouve, sauf pourtant dans le genre *Perodicticus*, chez tous les Lémuriens actuels ainsi que chez tous les représentants éocènes de ce groupe, les Pseudolémuriens ou Pachylémuriens de Filhol.

En effet, j'ai constaté sa présence, mais sans la perforation intercondylienne chez *Indris* (*I. brevicaudatus* E. Groff.), *Propithecus* (*P. diadema* Bennet, *P. verreauxi* A. Grand.), chez *Avahis* (*H.*

laniger Gm.), chez *Lemur* (*L. varius*, Is. Geoff., *L. macaco* L., *L. mongoz* L., et *L. mongoz rufifrons* Et. Goff., *L. rubriventris* Is. Geoff. et *L. catta* L.), chez *Opolemur* [*O. samati* Grand.], chez *Microcœbus* (*M. furcifer* Blarim, *M. murinus* Miller), chez *Chiromys* (*C. madagascariensis* Et. Geoff.) et chez *Tarsius tarsius* (Erxl.).

Dans le groupe des Singes, on ne constate pas plus d'homogénéité que dans les autres groupes étudiés. La perforation de la fossette olécrânienne ne se présente qu'exceptionnellement (divers *Hylobates*, *Cercopithecus*, *Papio*, etc.).

Le foramen entépicondylien manque chez beaucoup de Singes du Nouveau Monde, les Platyrhiniens, par exemple chez *Alouata*, *Ateles* et, d'après Weber, chez *Hapale*. Mais pourtant il existe, généralement, d'après Giebel, Grüber, Schlosser, chez *Cebus* Erxl., *Saïmiris* Voigt, *Nyctipithecus* Spix, *Callicebus* Thomas (entre autres souvent chez *C. cupreu* (Spix), d'après Stromer), *Pithecia* Et. Geoff., *Callithrix* Erxl. (= *Hapale* Ill.), ainsi que chez *Cothurus* (*C. rubricondus* Is. Geoff. et Dev.), où j'ai constaté sa présence.

Malgré cela, Stromer ne l'a pas rencontré chez *Callicebus nigrifrons* (Spix), ainsi que chez *Midas rosalia* L., et *Callithrix jacchus* (L.); mais Grüber le signale sur un spécimen d'*Hapale vulgaris* [= *Callithrix jacchus* L.]. D'après de Blainville, il manque chez le Tamarin pinche [*Midas œdipus*] (L.); mais je l'ai pourtant vu sur un spécimen de cette espèce.

Le trou susépicondylien manque d'une façon plus constante chez les Singes de l'Ancien Monde, malgré quelques observations contradictoires. Ainsi Tiedemann signale sa présence chez *Cercopithecus sabaeus* L., et chez *Cercocebus fuliginosus* Et. Geoff., tandis qu'il est nié chez ces mêmes espèces par Meckel et Otto.

Il n'existe pas chez *Cercopithecus*, *Semnopithecus*, *Macacus*, *Papio*, *Nasalis* [*N. lanatus*] Wurmb., etc. Mais à ce propos il est utile de faire remarquer que, pour chaque espèce, le nombre des squelettes étudiés n'est pas très grand, en sorte qu'on ne peut pas affirmer que ce foramen ne se présente pas de temps en temps comme chez l'homme.

Il manque toujours chez les Anthropomorphes, ou plutôt il n'y a jamais été constaté, tandis qu'il existe, au moins à l'état rudimentaire, chez l'Homme actuel dans la proportion de 1 à 2 0/0 (Grüber, Struthers, Testut, Hultkrantz, etc.) et chez les Hommes fossiles, où la proportion est à peine un peu plus forte d'après MM. Verneau et Thévenin.

Comme on le voit, entre les Lémuriens, les Platyrhiniens et les

Singes de l'Ancien Monde, il y a une remarquable différence au point de vue qui nous occupe, malgré le rapport que présente l'extrémité distale de leur humérus, qui est encore très large dans ces groupes et malgré la similitude qu'ils offrent dans leur vie arboricole. Ainsi les Lémuriens actuels et fossiles ont tous un humérus perforé, sauf *Perodicticus*, les Platyrhiniens en sont le plus souvent pourvus, et les Singes de l'Ancien Monde exceptionnellement seulement.

En somme, ce foramen n'est absent avec certitude que chez les Chiroptères, les Cétacés, les Siréniens et les Ongulés, et il est toujours présent chez les Monotrèmes, les Toxodontidés, les Typothériidés et les Pachylémuriens.

Beaucoup d'auteurs, après Grüber, se sont occupés de cette question, et tous sont arrivés à cette opinion que cette perforation humérale au-dessus de l'épitrochlée est un caractère qui se retrouve plus fréquemment chez les formes primitives (Steinmann et Dodelein, Zittel, Baur, Schlosser, Stromer, etc.) ou tout au moins chez celles qui ont conservé le plus de caractères primitifs, et il en est de même de la présence d'un troisième trochanter.

Au contraire, la perforation de la fossette olécrânienne, par suite de la disparition de la cloison qui la séparait de la fossette coronoïdienne, semble n'apparaître qu'assez tardivement, et pourtant plusieurs genres de Créodontes la possèdent déjà, mais c'est avec le foramen supracondylien.

Il semble, d'après ce qu'on voit, que l'existence du foramen entépicondylien, comme celle du trou ectépicondylien, n'a qu'une importance théorique, peut-être assez faible. Serait-ce plutôt un caractère d'adaptation qu'un caractère vraiment primitif? En tout cas, quelle que soit son importance phylogénétique, l'extrême variabilité de son apparition ne permet pas de lui accorder une valeur dans la systématique.

CONTRIBUTIONS A LA CONNAISSANCE GÉOLOGIQUE DES COLONIES FRANÇAISES.

VIII. — SUR QUELQUES FOSSILES DU TILEMSI (SOUDAN);

Par Paul LEMOINE.

Ce n'est que depuis peu de temps que l'on possède des renseignements sur la géologie du Tilemsi à l'ouest de Tombouctou. Les premières données paraissent dues au lieutenant Desplagnes. En effet, M. A. Lacroix (1905, p. 5-6) signale que cet officier a recueilli un oursin (*Linthia*) et une huître (*Lopha*) du crétacé supérieur dans la vallée sèche du Tilemsi; le capitaine Théveniault aurait également trouvé une huître dans le calcaire de Tabankort, à 100 kilomètres plus au nord dans la même vallée.

En 1907, Chudeau (p. 333) signale à nouveau l'existence du crétacé supérieur à Tabankort où il est caractérisé par *Ostrea Pomeli* Coq., *O. Nicaisei* Coq., *O. Bourguignati* Coq. Des fossiles éocènes auraient, dit-il, été recueillis en même temps; mais il ne précise pas lesquels.

Gautier (1907, p. 104) a également vu ce point, et il dit qu'on y voit affleurer en larges bancs horizontaux le calcaire crétacé fossilière; c'est par places une véritable lumachelle.

M. M. Arnaud et Cortier, qui ont pour la troisième fois après Foureau et Lamy, après Gautier et Chudeau, traversé le Sahara, ont pensé, malgré la rapidité de leur marche, à ramasser les quelques fossiles qui les ont frappés sur leur route; ils ont bien voulu, chacun de leur côté, me les communiquer (1).

Je ne saurais trop les en remercier; en effet, comme l'a dit récemment M. A. Lacroix, tout document géologique provenant d'une région inexplorée peut être intéressant à de multiples points de vue.

J'ai déjà donné (2) les résultats préliminaires de cette étude;

(1) Les échantillons du capitaine Arnaud étaient destinés à M. Jean Chautard, ancien chef du service géologique de l'Afrique occidentale française, qui a bien voulu m'en céder l'étude; ils étaient restés à Dakar, d'où M. R. Chudeau a eu l'amabilité de me les réexpédier.

J'adresse à MM. Jean Chautard et R. Chudeau l'expression de ma reconnaissance pour l'amitié qu'ils m'ont témoignée en cette circonstance et en d'autres.

(2) Paul Lemoine, *Sur les fossiles rapportés du Tilemsi par la mission Arnaud-Cortier; in* Maurice Cortier, *D'une rive à l'autre du Sahara* (Paris, Larose, 1908), pp. 403-409 (1 fig.); — voir une carte de cette région dans *la Mission Arnaud-Cortier* (*Bull. Com. Afr. française*, 1907, pp. 433-441).

mais comme ces fossiles, provenant de régions encore à peu près inexplorées, peuvent se retrouver ailleurs et comme ils peuvent par suite servir à établir le synchronisme de couches locales, j'ai pensé qu'il serait utile de les figurer, malgré leur médiocre état de conservation.

Je crois ainsi rendre service aux géologues qui sont appelés à s'occuper de l'Afrique occidentale et attirer l'attention des voyageurs et des colons sur l'intérêt qu'il y aurait à multiplier des récoltes de ce genre.

Les fossiles qui m'ont été remis peuvent être rapportés à deux niveaux distincts, l'un crétacé, l'autre considéré jusqu'à présent comme tertiaire.

1° *Fossiles crétacés*

Il y a d'abord une vertèbre de *Dinosaurien* que j'ai communiquée à mon ami M. Thevenin et qui, d'après lui, est indéterminable.

Il y a ensuite plusieurs huîtres.

Ostrea Pomeli Coquand

(Pl. II, *fig* 4ª, 4ᵇ)

(1862. — *O. Pomeli :* Coquand, Constantine, p. 46, Pl. XI, *fig.* 5-10.)

L'espèce soudanaise a la même allure des côtes de la valve inférieure que l'espèce-type qui vient du Campanien du Djebel-Seita, près de Sétif, en Algérie.

Ces côtes, au nombre de cinq à six, épaisses, simples, très espacées, sont traversées par des plis concentriques d'accroissement formant des lamelles imbriquées.

La valve supérieure a également la même ornementation; elle est légèrement concave.

Rapports et différences. — La forme la plus voisine est *O. Tissoti* Thomas et Peron (p. 196, Pl. XXIV, *fig.* 1 à 7) figurée aussi depuis par Oppenheim (p. 365, Pl. XXXIV, *fig.* 1), qui se trouve dans le Campanien d'Algérie, de Tunisie et d'Égypte. La valve supérieure de cette espèce est légèrement convexe ; l'ornementation est un peu différente; les cotes sont plus nombreuses et moins épaisses.

Une espèce tertiaire, assez semblable, a été signalée à Tamaské, dans le Soudan anglais par Bullen Newton ; c'est *Alectryonia Mar-*

tinsi d'Archiac trouvée aussi à Cutch dans l'Inde et à Biarritz en France ; c'est une coquille qui, comme Newton l'a fait remarquer, se rapproche beaucoup des huîtres crétacées ; mais elle diffère d'*Ostrea Pomeli* par sa forme beaucoup plus circulaire et ses côtes plus nombreuses.

Localité. — Anou-Melloum.

Ostrea Pomeli Coquand

Var. *soudanensis*, nova

(Pl. II, *fig.* 3ª, 3ᵇ)

Une autre forme, très allongée, a été recueillie par le capitaine Arnaud dans le même point ; elle a, de plus, exactement la même gangue.

Si elle avait été recueillie seule, je n'aurais certainement pas songé à la rapporter à *Ostrea Pomeli*. Elle présente cependant avec cette huître quelque analogie ; en particulier ses stries d'accroissement sont assez semblables.

2° *Fossiles tertiaires*

Les autres fossiles peuvent être considérés provisoirement comme éocènes, par analogie avec les formes analogues signalées plus à l'est par divers auteurs, et en particulier par B. Newton.

Une coupe schématique, que m'a dessinée le lieutenant Cortier, montre de la façon la plus frappante la superposition des deux niveaux crétacé (à huîtres) et éocène (à *Nautilus*). Mais il serait très utile d'avoir dans cette région une coupe géologique plus détaillée et plus précise pour se rendre un compte exact de l'allure des couches, qui reste un peu énigmatique.

En particulier, les couches considérées jusqu'à présent comme éocènes n'ont encore fourni aucune forme vraiment caractéristique ; elles se trouvent à une bien faible distance au-dessus du Crétacé, et il est possible qu'un jour on vienne à les considérer comme appartenant au crétacé supérieur. J'ai été heureux de trouver une confirmation de cette hypothèse dans un récent travail de Krumbeck.

Les principaux fossiles recueillis sont des céphalopodes, des gastropodes, des lamellibranches et des oursins ; ils viennent d'Anou-Melloum, près de Gao.

Crocodilus sp.
(Pl. II, *fig.* 1)

L'unique débris de mâchoire que j'ai entre les mains est indéterminable. Il est cependant intéressant de la figurer pour indiquer l'intérêt qu'il y aurait à retrouver des ossements de vertébrés dans cette région.

Il se rapproche un peu de celui du Mont-Aimé et de celui du Fayoum.

Nautilus Deluci d'Archiac(1)
(Pl. II, *fig.* 5a, 5b, 6a, 6b)

1853. — *Nautilus Deluci* d'Archiac, Foss. numm. de l'Inde, p. 337, Pl. XXXV, *fig.* 2.
1903. — *Nautilus Lamarcki* Deshayes, *in* de Lapp., non Desh.

En dehors de l'exemplaire rapporté par M. Cortier et figuré ici, j'ai eu entre les mains plusieurs échantillons de ce Nautilus, qui paraît assez commun au Soudan. J'ai étudié en particulier celui qui a été signalé à Tamaské par M. A. de Lapparent (1).

Tous ces échantillons me paraissent identiques entre eux; mais je ne crois pas qu'ils se rapportent exactement à l'espèce de Deshayes (1824, t. II, p. 767. Pl. C. *fig.* 1, et *fig.* 2, p. 62).

Il est beaucoup plutôt voisin de *N. Deluci* d'Archiac, ainsi que M. A. Thevenin l'avait déjà remarqué (2).

Rostellaria cf. goniophora Bellardi
(Pl. II, *fig.* 2a, 2b)

1854. — *Fusus goniophorus* Bellardi, p. 181. Pl. I, *fig.* 8.
1900. — *Rostellaria goniophora* Blanckenhorn, p. 446.
1905. — *Rostellaria goniophora* Newton, p. 90. Pl. V, *fig.* 1.

Les échantillons sont beaucoup mieux conservés que ceux qu'a figurés Newton (p. 90, Pl. V, *fig.* 1); on voit bien sur l'un d'eux la dernière portion de la spire.

Cette espèce, déjà signalée à Tamaské (Soudan), se trouve aussi en Egypte dans les couches lutétiennes du Fayoum.

La figure de Bellardi est très défectueuse, de telle sorte que j'ignore si les formes du Sahara peuvent être effectivement rapportées à celles d'Egypte.

(1) Cet échantillon se trouve dans les collections du Laboratoire de Géologie, à la Sorbonne.

(2) Détermination de l'échantillon exposé dans la Galerie de Paléontologie, au Muséum d'Histoire naturelle.

Ovula cf. depressa J. de C. Sow.

1840. — *Cypræa depressa* J. de C. Sow., Pl. XXIV, *fig.* 12.
1853. — *Ovula depressa* d'Archiac, p. 329, Pl. XXXIII, *fig.* 1-2.
1866. — *Ovula depressa* d'Archiac *in* Tchihatcheff, p. 119, Pl. II, *fig.* 4.

Un moule indéterminable de grande *Ovula* peut être rapproché de *O. depressa* Sow., du nummulitique de l'Inde. La même espèce a été signalée en Asie Mineure d'après les récoltes de Tchihatcheff. D'Archiac la mentionne également dans l'Aude.

Natica sp.

Moule indéterminable spécifiquement, présentant une assez grande analogie avec les *Natica* signalées par Tchihatcheff et décrites par d'Archiac.

Cardium cf. galaticum d'Archiac.

1866. — *Cardium galaticum* d'Archiac *in* Tchihatcheff, p. 158. Pl. XII, *fig.* 5 a.

Cette espèce est voisine d'aspect de *Cardium galaticum*, mais elle a les côtes plus grosses et plus espacées.

Hemiaster sudanensis Bather.

Il existe dans la collection Arnaud-Cortier plusieurs échantillons de cette espèce provenant de Anou-Melloum et identiques aux formes que Bather a décrites de la région de Tamaské et qui, d'après lui, sont éocènes.

J'expliquerai dans une note ultérieure, comment d'après un tout récent envoi que le lieutenant Cortier m'a fait du Nord du Soudan, on ne serait pas amené à considérer cette espèce comme éocène.

Plesiolampas cf. Paquieri Lambert.

M. Cottreau, qui s'occupe au Laboratoire de Paléontologie du Muséum de l'étude des Échinides, a bien voulu me remettre sur cet échinide la note suivante :

« Cet échinide ne peut être déterminé avec certitude, vu son état défectueux.

« Par sa forme générale et ses dimensions, il se rapproche du

Plesiolampas Paquieri Lamb. Il en diffère toutefois par ses ambulacres qui sont plus pétaloïdes, tandis que *P. Paquieri* a des ambulacres droits. Les zones porifères de cet échinide ont des pores internes plus allongés que les pores externes qui sont arrondis. Cette disposition est l'inverse de ce que montre *Pl. Paquieri*.

« La forme du périprocte est malheureusement indistincte (le périprocte est transversal chez *Echinolampas*, longitudinal chez *Plesiolampas*). Les ambulacres ne paraissent pas avoir été saillants.

« A la face inférieure, les pores sont petits, ronds, disposés par paires espacées. Les tubercules très petits paraissent être imperforés.

« Si l'on réfléchit que *Plesiolampas* diffère d'*Echinolampas* par ses ambulacres presque droits, ses zones porifères subégales, ses pores ronds presque égaux, son périprocte longitudinal, son péristome sans floscelles bien marqués, enfin par ses tubercules imperforés, cet échinide des environs de Tombouctou paraîtra sans doute être plus *Echinolampas* que *Plesiolampas;* aussi je ne le regarde comme étant un *Plesiolampas* qu'avec beaucoup de doute, m'appuyant sur certaines ressemblances avec *P. Paquieri*. »

M. Cottreau a d'ailleurs publié récemment sur les *Plesiolampas* de l'Afrique centrale un travail d'ensemble qui complète cette note.

CONCLUSIONS

Les analogies de la faune connue de l'Afrique centrale apparaissent de plus en plus avec l'Egypte, l'Asie Mineure, l'Inde, c'est-à-dire avec la région équatoriale mésogéenne. De telles analogies ont déjà été mises en évidence pour les faunes du Sénégal par Jean Chautard, pour celles du Cameroun par Oppenheim.

Il est curieux, par contre, de constater que jusqu'à présent il n'y a guère de relations entre les faunes éocènes de ces trois pays africains, soit que les récoltes aient été encore insuffisantes, soit que les niveaux soient un peu différents (1), soit que réellement ces relations aient été faibles.

C'est un problème dont la solution ne tardera guère à être connue, grâce au zèle de nos officiers d'Afrique; mais dès à présent le caractère équatorial et tropical de cette faune paraît très net et s'oppose à celui des faunes lutétiennes du bassin de Paris avec lesquelles il n'y a pour ainsi dire pas d'espèces communes.

(1) Ces différences s'expliqueraient particulièrement bien si les formes du Soudan appartenaient au crétacé tout à fait supérieur.

3° *Falaise de Tabankort*

Le lieutenant Cortier a de plus attiré mon attention sur ce fait que la falaise de Tabankort constituait un accident géographique important; elle paraît en effet se suivre depuis Mabrouck (1) jusque vers Izigui (2).

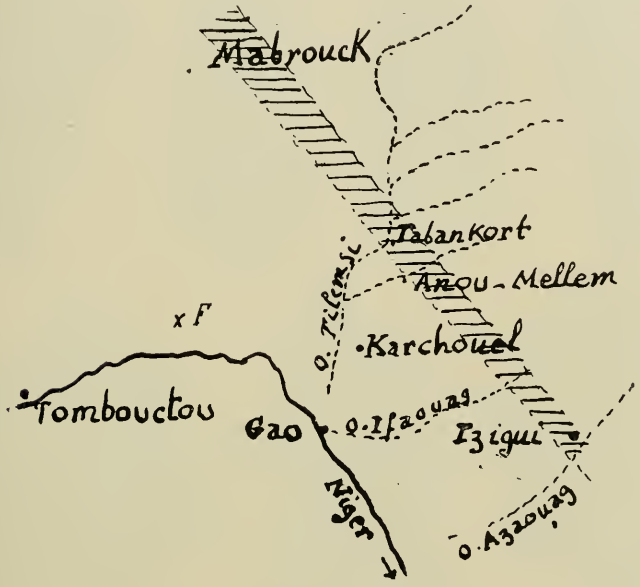


Fig. 1. — Carte schématique de l'allure de la bande calcaire entre Mabrouck, Tabankort et Izigui.

Bande calcaire.

F. Gisement fossilifère dont il n'a pas été rapporté d'échantillon.

Il faudra donc réunir ces gisements restés jusqu'alors isolés sur la carte géologique.

La façon brusque dont paraît se faire le contact entre le dévonien et le crétacé supérieur, aussi bien à Mabrouck qu'à Tabankort, reste énigmatique; les grès du Tegama, représentant le crétacé inférieur,

(1) On sait que le capitaine Theveniault (*in* Chudeau) a rapporté de cette localité des fossiles crétacés (*Cardita Beaumonti*) très élevés dans la série géologique.

(2) Il est probable que les huitres que signale Chudeau et que R. Arnaud et le capitaine Pasquier lui ont remis de la région entre Gao et l'Adr'ar' de Tahoua proviennent du prolongement de cette falaise.

paraissent masquer un affleurement ou tout au moins seraient fort réduits ; il semble, au contraire, qu'ils existent en profondeur ; du moins Chudeau explique de cette façon l'existence de puits profonds de la région de Tabankort.

Cette falaise serait, dans ces conditions, parallèle à une faille dont la direction serait sensiblement N.-O.-S.-E., c'est-à-dire perpendiculaire à celle des plissements de la région et qui aurait certainement joué un rôle considérable dans le mode de formation des pays du cercle du Niger.

Toutes les questions géologiques relatives à cette région ont d'ailleurs une grande importance théorique, à cause de l'intérêt qui s attache à l'origine de cette curieuse région, et une grande importance pratique pour arriver à déterminer l'allure des niveaux aquifères dont la mise en œuvre permettra de reconquérir ces pays aujourd'hui à peu près déserts.

Liste des ouvrages cités

D'Archiac, *Description des animaux fossiles du groupe nummulitique de l'Inde*. Paris, 1853. — *Voir* aussi Tchihatcheff.

Bather, *Eocène Echinoids from Sokoto* (*Geological Magazine*, 5e série, I, 1904, p. 292, pl. XI).

Bellardi, *Catalogo ragionato dei fossili nummulitici d'Egitto*..... (*Mem. della Reale Acad. delle Scienze*, Torino, 2e série, XV, 1855, pp. 171-203, pl. I à III).

Jean Chautard, *Formations éocènes du Sénégal* (*Bull. Soc. géol. Fr.*, 4e série; V, 1905, p. 148, pl.V).

Coquand, *Géologie et paléontologie de la région sud de la province de Constantine*.

Coquand, *Monographie du genre Ostrea*.

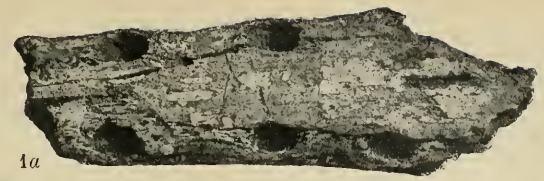
R. Chudeau, *Excursion géologique au Sahara et au Soudan* (*Bull. Soc. géol. Fr.*, 4e série, VII, 1907, pp. 319, 347, pl. XI).

E.-F. Gautier, *A travers le Sahara français; d'In-Onzel au Niger* (*La Géographie*, XV, 1907, pp. 1-29, pl. I).

A. Lacroix, *Résultats minéralogiques et géologiques des récentes explorations dans l'Afrique occidentale française et dans la région du Tchad* (*Revue coloniale*, 1905).

De Lapparent, *Sur la découverte d'un oursin d'âge crétacé dans le Sahara oriental* (*C. R. Acad. Sc.*, CXXXII, 1901, pp. 388-392).

Lambert, *Sur un Plesiolampas de l'Afrique centrale, communiqué par M. Paquier* (*Bull. Soc. géol. Fr.*, 4e série, VI, 1906, p. 693-695, pl. XXIII, *pars*).



1*a*

2*a*

3*a*

3*b*

2*b*

4*a*

5*a*

4*b*

6*a*

5*b*

6*b*

B. Newton, *Eocene shell from Nigeria* (*Ann. a. Mag. Nat. History*, 6e série XV, 1905, pp. 83-91, pl. V).

Oppenheim, *Zur Kenntniss alttertiarer Fauna in Ægyptien* (*Paleontogr.*, XXX, 3e livr., 1903).

P. Oppenheim, *Vorläufige Mitteilung ueber das Auftreten von Eocän in Kamerun* (*Centralblatt f. Miner.*, etc., 1903, p. 373-374).

Peron, *Description des Invertébrés fossiles des terrains crétacés de la Tunisie.*

Peron, *Explor. scientifique de la Tunisie*, 1885-1893, 405 pp. 21 pl.

J. de C. Sowerby, *Transactions geol. Soc. of London*, 2e série, V, 1840.

P. de Tchihatcheff. *Asie Mineure. Description physique de cette contrée*, Paléontologie, par A. d'Archiac, P. Fischer et E. de Verneuil. Paris, 1866.

Planche II

Fossiles crétacés et éocènes du Soudan rapportés par la mission Arnaud-Cortier

1. *Crocodilus* sp. : Anou-Melloum, près Gao.

2a, 2b. — *Rostellaria goniophora* Bellardi.

3a, 3b. — *O. Pomeli* Coq. : var. *sudanensis* nov. ; Anou-Melloum, près Gao (capt. Arnaud).

4a, 4b. — *Ostrea Pomeli* Coq. ; Anou-Melloum, près Gao (capt. Arnaud).

5a, 5b, 6a, 6b. — *Nautilus Deluci* d'Archiac. Anou-Melloum, près Gao (capt. Arnaud).

OBSERVATIONS FAITES SUR LE TREMBLEMENT DE TERRE DE PROVENCE (11 juin 1909) ;

Par Paul LEMOINE.

I. *Détermination des effets des tremblements de terre.*
II. *Exposé géographique des effets du tremblement de terre de Provence sur les habitations.*
Zone Nord. — Massif calcaire (Chaîne des côtes). — Zone Sud. — Villages dévastés au sud de la zone tectonique. — Massif stable de l'Est. — Massif stable de l'Ouest. — Zone affectée au sud de Salon.
III. *Relations des zones dévastées avec les accidents tectoniques.*
Origine des dégâts au sud de la zone sismogénique. — Secousses extérieures et secousses prémonitoires. — Répliques.
IV. *Effets du tremblement de terre.*
Effets sur l'homme. — Bruits souterrains. — Action sur les sources. — Orientation des dégâts. — Apparence de mouvements giratoires.
V. *Influence des divers facteurs sur les dégâts causés par le tremblement de terre.*
Sous-sol. — Altitude. — Mode de construction. — Minimes dégâts aux cheminées et aux puits. — Dégâts aux églises.
VI. *Apparence de disposition zonaire des dégâts dans la zone dévastée.*

Un violent tremblement de terre vient d'affecter la Provence, y causant de nombreuses victimes et d'importants ravages. Il s'est produit le vendredi 11 juin 1909, vers neuf heures un quart du soir. Les pays qui sont les plus affectés sont situés au nord d'Aix-en-Provence.

Il est à peu près impossible de déterminer avec précision l'heure des secousses dans la région ; car on n'est pas assez sûr du réglage des montres et des horloges. Mais tout le monde est d'accord pour admettre l'existence de deux secousses vers $9^h\,15$ et $9^h\,40$, dont la première a été la plus forte et a causé la presque totalité des dégâts.

D'après les observations faites à l'Observatoire de Marseille, les secousses ont eu lieu à $9^h\,15$ ($21^h\,7^m\,2^s$, heure de Greenwich) et à $9^h\,40$ ($21^h\,33^m$) avec une direction N.-E.-S.-W. Il n'y a pas eu de grondement (1).

Lss impressions sur la durée de la secousse sont assez concordantes ; celle-ci aurait duré environ 5 secondes.

Voici les chiffres que j'ai relevés à cet égard (2) :

Aix, 7 secondes ; Arles, 5 à 6 secondes ; Aurons, 6 secondes ; Avignon, 5 secondes ;

(1) Alfred Angot, *Sur le tremblement de terre du 11 juin 1909* (*C. R. Acad. Sc.*, CXLVIII, 14 juin 1909, pp. 1640-1641).

(2) Publiés par les journaux locaux au lendemain de la catastrophe.

Eyguières, 6 secondes ; Mouries, 5 à 6 secondes ; Puy-Sainte-Réparade, 20 secondes.

En ce qui concerne les pays plus éloignés, les chiffres sont plus variables :

Béziers, 5 à 6 secondes; Montpellier, 20 secondes; Nîmes, 6 secondes; Cannes, 2 secondes; Toulon, 2 secousses de 4 secondes à $9^h 16$ et $9^h 18$ d'après les uns; 1 secousse de 6 secondes d'après les autres.

On a beaucoup parlé de ce tremblement de terre, et l'on a émis sur son origine une série d'hypothèses dont quelques-unes sont en désaccord avec les données acquises en sismologie et d'autres avec les faits observables sur le terrain.

Aussi ai-je pensé qu'il serait intéressant d'aller en étudier les effets sur place. Je résumerai donc ici les résultats de deux voyages et d'une douzaine de jours de courses personnelles sur les lieux. Je regrette seulement d'avoir été le seul géologue à parcourir ces régions presque aussitôt après l'événement; car, dans une région aussi vaste, beaucoup de faits intéressants m'ont certainement échappé.

Pour y obvier dans la mesure du possible, j'ai dépouillé les journaux locaux, et j'ai contrôlé la plus grande partie de leurs renseigements.

La structure géologique de cette région est très compliquée dans le détail; mais, au point de vue géographique, elle peut se schématiser facilement. Des massifs calcaires d'âge jurassique et crétacé constituent les parties montagneuses; ils sont plissés et disloqués; à leur surface et dans leur intervalle se trouvent des argiles et des marnes du Crétacé supérieur et du Tertiaire, qui sont également plissés et faillés et qui masquent souvent les grandes dislocations, affectant les calcaires sous-jacents.

Enfin, en un point, à Beaulieu, s'élèvent les ruines d'un ancien volcan oligocène (tertiaire inférieur), complètement éteint depuis plusieurs périodes géologiques et constitué par des coulées de basalte, accompagnées de tufs et de scories.

(1) Cette étude n'a porté que sur les pays les plus dévastés. Elle n'a nullement la prétention de remplacer l'enquête minutieuse et détaillée que font en ce moment le Bureau central météorologique et la Commission météorologique des Bouches-du Rhône, dont les questionnaires commençaient à être reçus dans le pays le jour même où je quittais les localités sinistrées. Elle a également été faite dans un ordre d'idées un peu différent de celui sous lequel M. Fabry envisage le problème et qui l'amène à des résultats intéressants. Le phénomène est si complexe que chaque spécialiste est amené à l'étudier par des méthodes différentes.

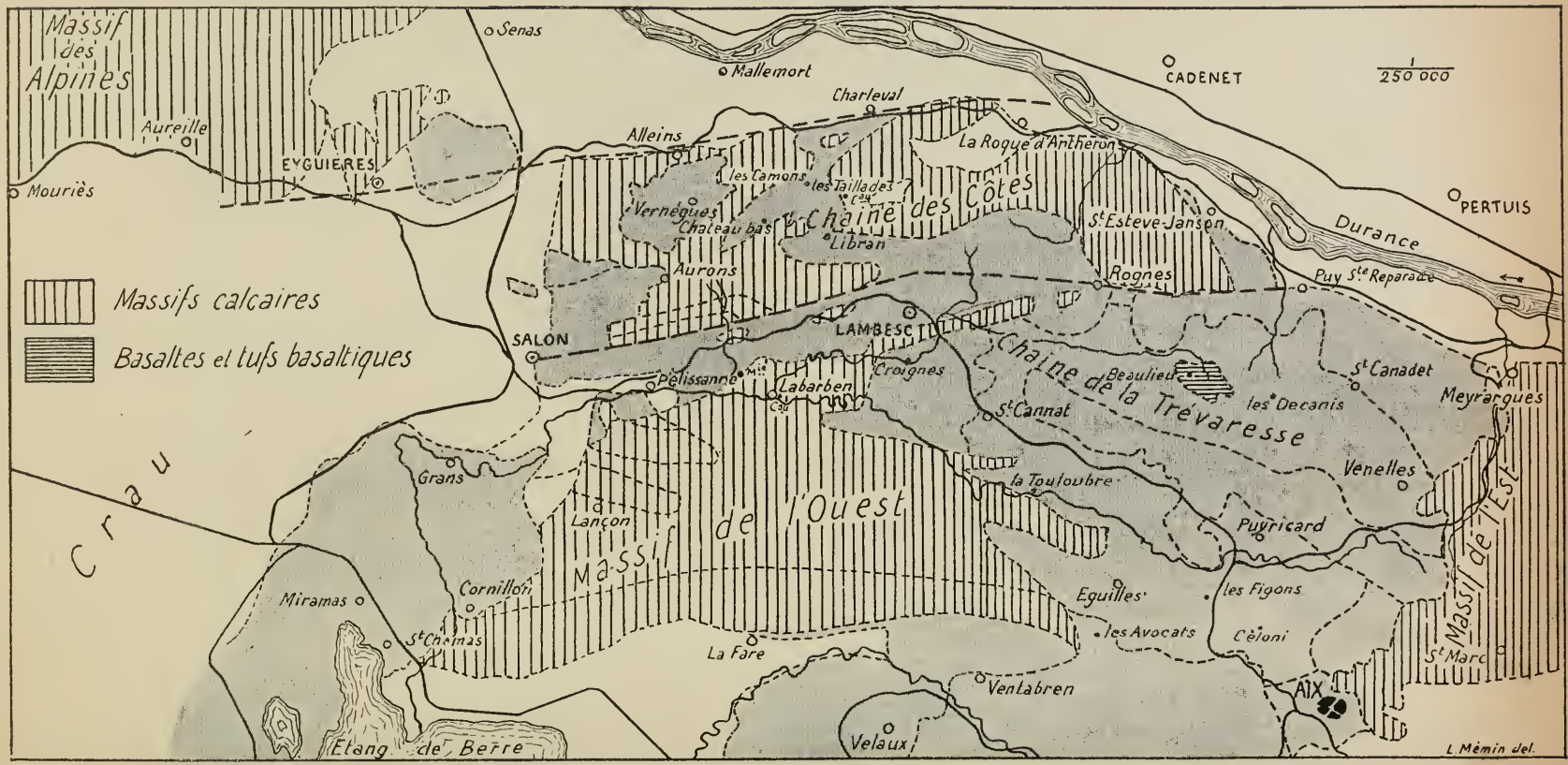


Fig. 1. — Carte géologique schématique avec l'indication des principaux points dévastés.

Au point de vue géographique, les points atteints forment deux zones principales :

1° Une zone nord comprise entre les Alpines et la Chaîne des Côtes ;

2° Une zone plus méridionale, située au sud de cette chaîne.

Enfin, au delà de cette zone, se trouve, aux abords de la chaîne de la Trevaresse, une région qui a été très dévastée.

Une autre région, moins atteinte, se trouve au sud de Salon.

Ces différentes régions sont séparées par des massifs calcaires, où les habitations ont été peu endommagées et qui, par suite, paraissent avoir été relativement stables. Je montrerai plus loin quel rôle ces massifs stables me paraissent avoir joué au point de vue de la propagation des ondes sismiques.

I

Détermination des effets des tremblements de terre

Il convient tout d'abord de rappeler que l'on détermine, en général, l'intensité relative des tremblements de terre d'une façon toute empirique, par les effets produits sur les édifices et sur l'homme.

A cet effet, on a établi des échelles d'intensité, dont les plus connues sont celle de Rossi-Forel et de Mercalli.

Ces deux échelles peuvent d'ailleurs se réduire plus ou moins l'une à l'autre; celle de Mercalli a été adoptée en 1900 par le service géodynamique d'Italie, et voici les données sur lesquelles elle s'appuie :

X. *Secousse très désastreuse.* — Ruine de beaucoup d'édifices; nombreuses victimes; crevasses du sol. — Eboulements dans les montagnes.

IX. *Secousse désastreuse.* — Ruine totale ou presque totale de quelques habitations; graves dégâts à beaucoup d'autres devenues inhabitables : victimes sinon très nombreuses, du moins en divers points des lieux habités.

VIII. *Secousse ruineuse.* — Ruine partielle de quelques habitations : dégâts considérables aux autres. Pas de victimes; seulement quelques blessés isolés.

VII. *Secousse extrêmement forte.* — Les cloches sonnent. Chute des cheminées et des tuiles. Légers dommages à de nombreux édifices.

VI. *Secousse très forte.* — Secousse sentie par tout le monde. Effroi général. On se précipite au dehors. Chute d'objets et d'enduits. Quelques dommages aux édifices les moins solides.

V. *Forte secouse.* — Secousse généralement sentie dans les habitations et par un assez grand nombre de personnes dans la rue. Réveil des personnes endormies. Effroi de quelques-unes qui se précipitent au dehors. Tintement des sonnettes ; oscillations assez amples des objets suspendus; arrêts d'horloges.

Les types inférieurs, IV, III, II, I, sont relatifs à des tremblements de terre beaucoup moins intenses, dont nous n'aurons pas à nous occuper ici.

L'échelle de Mercalli, et toutes les échelles analogues ont un grand avantage, celui de ne nécessiter l'emploi d'aucun instrument et de permettre d'utiliser toutes les observations faites dans une région déterminée. D'autre part, elle a des inconvénients sérieux; elle ne tient pas compte de la plus ou moins grande solidité des habitations, et l'appréciation du degré peut être variable suivant les observateurs. Ces inconvénients disparaissent à peu près, quand il s'agit d'une région unique où le mode de construction est sensiblement analogue pour la grande majorité des maisons et où les appréciations de degré sont faites par un même observateur.

J'ai donc appliqué ces données à la région provençale, dévastée par le tremblement de terre, et j'ai noté sur une carte au 1/80.000, le degré d'intensité approximatif pour environ trois cents localités (villages, fermes, châteaux). Ces constatations, traduites en courbes, et réduites à l'échelle du 1/200.000, permettent de se faire une idée de la variation d'intensité, suivant les points, et la réduction élimine la plupart des causes d'erreur qui auraient pu s'introduire.

Il peut être intéressant d'estimer d'une autre façon les dégâts commis et de voir si les deux modes d'estimation sont concordants. Le service vicinal des Bouches-du-Rhône a procédé à l'évaluation en argent des dommages causés par le tremblement de terre ; cette évaluation a été faite par commune ; comme on connaît, d'autre part, le nombre des habitants par commune, on a facilement le dégât moyen causé par le cataclysme à chaque habitant.

Le chiffre ainsi obtenu devrait être, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel à l'intensité du tremblement de terre. Malheureusement il faut tenir compte d'un certain nombre de facteurs :

1° Le mode d'évaluation. Ce mode d'évaluation a été fait sommairement pour avoir un chiffre global à présenter rapidement au Parlement; pour certaines communes il est certainement inexact. Mais, dans le cas où il était trop faible, des protestations ont eu lieu, et des chiffres supérieurs ont été indiqués par les maires ; il en résulte que, pour certaines communes, on a deux chiffres, souvent très différents.

2° La richesse de la population. Il est bien certain que, à intensité égale, le tremblement de terre cause des dommages plus importants à des habitants riches habitant des maisons de valeur qu'à des habitants pauvres, habitant des immeubles délabrés. A cet égard les

chiffres fournis pour les villages ruraux sont certainement trop faibles ;

3° Dans les pays très atteints, on n'a estimé que les dégâts les plus apparents ; le chiffre est donc généralement trop faible ; dans les pays peu atteints, l'attention s'est trouvée portée sur les moindres dommages, et les chiffres sont généralement trop élevés ;

4° Enfin il faut tenir compte de ce fait que, dans une même commune il y a des portions très abimées et d'autres à peu près intactes, de sorte que la valeur des dégâts moyens par habitants est forcément inexacte.

COMMUNES	NOMBRE D'HABITANTS	VALEUR DES DOMMAGES	DOMMAGE PAR HABITANT	TYPE PROPOSÉ PLUS LOIN
Saint-Cannat..	1.238	1.000.000	1.615	type IX
Rognes.....	1.556	1.610.000	1.034	type IX
Veruègnes.....	298	300.000	1.006	type IX
Puy St Réparade	1.335	1.200.000	971	type IX et type VIII
Lambesc.....	2.359	2.100.000	928	type IX
La Roque.....	2.548	1.200.000 [1]	774 [1]	type VIII
Venelles.....	509	250.000	491 [2]	type IX
Vauvenargues.	223	90.000	403 [2]	
Pelissanne....	1.549	600.000	387	type VIII
Eguilles.....	888	315.000 [1]	354 [1]	type VII ou VIII
Salon.....	13.897	4.600.000	331	type VIII ou IX
Meyrargues ...	950	300.000 [1]	303 [1]	type VIII et type VII
Eguilles.....	888	200.000	225	type VII ou VIII
Saint-Estève...	102	20.000	196 [2]	
Alleins.....	814	150.000	184	type VII ou VIII
La Barben	282	50.000	177	type IX et type VII
La Roque.....	1.548	250.000	161	type VIII
Peyrolles	886	140.000	158	type VI
Cornillon	338	50.000	148	type VII
Saint-Paul	273	40.000	146	type VI
Mallemort.....	2.195	300.000	137	type VII ou VIII
Saint-Marc	79	10.000	127	
Grans.....	1.773	200.000	112	type VII
Charleval	891	60.000 [1]	69 [1]	type VII ou VIII
Aurons.....	184	10.000	54	type VII
Meyrargues ...	950	50.000	50	type VIII et type VII
Jouques.....	1.218	50.000	41	
Charleval	891	20.000	23	type VII ou VIII
Istres	3.681	60.000	16	
Lançon.....	1.262	20.000	15	type VI
Eyguières.....	2.267	20.000	9	type VII
Mouriès.....	1.500	10.000	6	type VI ou VII

(1) Estimation non officielle.
(2) Commune pour laquelle le chiffre obtenu est manifestement inexact.

II

Exposé géographique des effets du tremblement de terre.

ZONE NORD

Cette région s'étend au sud des Alpines de Mouriès à Eyguières, puis au nord de la Chaîne des Côtes, d'Alleins à la Roque-d'Anthéron.

Les dégâts y sont assez importants, quoiqu'ils n'aient pas atteint le caractère désastreux qu'ils ont eu dans la bande située plus au sud.

Le point le plus à l'ouest parmi ceux qui ont été atteints sérieusement est Mouriès.

Mouriès. — Les dégâts les plus importants ont été produits à l'église ; le dôme du clocher a été renversé et a produit dans sa chute divers dégâts à la chapelle et à la cure ; quelques autres immeubles menacent ruine (type VI ou VII).

Aureilles. — On y aurait ressenti trois secousses ; deux anciennes maisons se sont écroulées (type VI).

Eyguières. — Les dégâts y ont été assez importants ; plusieurs toitures se sont effondrées ; un grand nombre de cheminées ont été renversées ; les cloches ont tinté ; une vive panique se serait emparée des habitants (type VII).

Alleins. — Un certain nombre de maisons sont lézardées ; plusieurs devront être démolies, d'autres nécessiteront de grandes réparations. En particulier on sera peut-être obligé de refaire une partie des écoles (type VII ou VIII).

Mallemort. — Le nombre des maisons lézardées est considérable ; les fissures se sont agrandies peu à peu et beaucoup d'immeubles sont inhabitables (type VII ou VIII).

Charleval. — Là aussi, les dégâts sont plus importants qu'on ne l'avait cru au début ; la plupart des maisons sont lézardées, et plusieurs sont devenues inhabitables (type VII ou VIII).

La Roque-d'Anthéron.—L'intensité du séisme a été assez grande ; plusieurs toitures se sont effondrées ; beaucoup de maisons sont plus ou moins lézardées (type VIII).

Il est arrivé dans cette commune ce qui est arrivé à Salon ; les dégâts sont plus grands qu'on ne l'avait cru au premier abord. C'est certainement le pays le plus atteint de la bande Nord.

Là paraît se borner la bande sismique du Nord ; car en face, de l'autre côté de la Durance, les dégâts sont à peu près nuls à Cadenet, à peine plus considérables à Lauris.

Vernègues. — Il faut faire une place tout à fait à part à Vernègues, au sud d'Alleins, qui a énormément souffert. La plupart des maisons sont détruites. L'ancien château est démoli ; il ne reste presque plus rien de l'église (type IX).

Par contre les régions basses de la région, les Jas, la Maison-Basse ont peu souffert.

Or Vernègues est situé sur un sommet très élevé constitué par de la molasse miocène, alors que les pays bas sont bâtis sur des calcaires crétacés.

MASSIF CALCAIRE, DIT CHAINE DES COTES

Ce massif de calcaires crétacés est peu habité, de sorte que l'on n'a sur l'intensité du tremblement de terre que des données assez disséminées. Cependant celles-ci sont fort typiques.

Ainsi *Aurons* n'a eu que quelques maisons endommagées ; le presbytère a dû être évacué, mais plutôt par prudence, et les autres immeubles, lézardés par la secousse, ne présentent aucun danger pour la sécurité publique et restent habitables. Au château, quelques créneaux seuls sont tombés (type VIII).

Plus loin, au-dessous de Vernègues, si cruellement éprouvé, le Château-Bas a été peu endommagé, et le petit temple romain de Diane, situé à côté, n'a presque aucun dommage. Ce temple est situé sur le calcaire.

Plus loin, le hameau des Camons n'a que quelques crevasses ; sur la route de Lambesc, un ancien four à chaux, en ruines, paraît indemne. Le château des Tailhades a relativement peu souffert.

Sur la route de Rognes à Cadenet, les dégâts sont minimes aux maisons situées à droite et à gauche ; or la route se maintient constamment dans les calcaires néocomiens. Les hameaux ou les fermes de : les Costes, Guitton, Richaud, qui se trouvent dans les mêmes conditions, n'ont pas été gravement atteints. Il en est de même de ceux du Vallon, Collet-Pointu, Valpu, et il est de notoriété publique à Rognes que ce massif calcaire, que l'on désigne sous le nom de Grand-Soleilland, a très peu souffert du tremblement ; Saint-Estève, Jansôn, situé sur son bord, a été peu éprouvé ; les habitants du hameau de Poncerot ont même éprouvé les secousses avec assez peu de violence.

Il ressort de l'exposé de ces faits que ce massif calcaire a peu souffert du tremblement de terre et que, placé entre deux zones relativement éprouvées, il est resté, lui, à peu près stable.

Nous verrons d'ailleurs, en continuant l'examen des effets du séisme, que cette indemnité relative n'est pas particulière à ce massif calcaire, mais qu'elle s'étend à tous les massifs calcaires de la région.

ZONE SUD

J'examinerai d'abord les points situés sur la ligne tectonique qui va de Salon à Meyrargues.

Salon. — Les dégâts produits par le tremblement de terre se chiffrent là par millions ; mais il faut bien tenir compte de ce fait que Salon est à peu près la seule ville de la région.

A Salon, il n'y a presque pas eu d'immeubles détruits par la catastrophe elle-même ; mais la plupart ont été tellement crevassés et endommagés qu'il faut les détruire.

Le château de Salon, qui sert de caserne, s'est en partie effondré et a du être évacué; la façade de la mairie a beaucoup souffert; le clocher de l'église Saint-Laurent est lézardé ; certains quartiers, comme celui de la rue d'Avignon, etc., ont été particulièrement éprouvés (type VIII ou IX).

Pélissanne. — Le village de Pélissanne a beaucoup souffert de la catastrophe, puisque celle-ci y fit des victimes : plusieurs blessés. Les maisons sont à peu près toutes lézardées et beaucoup de plafonds sont tombés. Le clocher est incliné et menace ruine.

L'intensité du tremblement de terre paraît y avoir été à peu près la même qu'à Salon (type VIII).

La Barben. — Cette commune comprend deux portions nettement distinctes : celle où se trouvent la mairie, les écoles, etc., a été très éprouvée (type IX) ; les deux cafés qui s'y trouvaient sont complètement détruits.

Quoique considérables, les dégâts de la région de l'église et du château sont beaucoup moins graves (type VII).

Lambesc. — Entre Pélissanne et Lambesc se trouve le château de *Bon-Recueil*, qui a été gravement endommagé.

Le canal de la Durance qui traverse la zone affectée entre *Bon-Recueil* et *Lambesc*, a subi quelques fissures ; le pont du chemin de fer en ce point a été également assez fortement atteint.

Le petit chef-lieu de canton de Lambesc est très atteint; certaines portions du village sont complètement détruites, tandis que d'autres

sont relativement plus épargnées, et je reviendrai plus loin sur ce point.

Le clocher de l'église a dû être démoli.

Au delà de Lambesc, vers Rognes, la plupart des fermes et des maisons de campagne ont été démolies par le tremblement de terre. Je signalerai, par exemple, le château de Fontvive. Au domaine de la Pomme, la façade est complètement détachée. A la Javie, les murs de la ferme se sont écroulés, enfouissant environ 150 moutons. Des fermes de la Chapusse il ne reste presque rien. Le Petit-Saint-Paul est en piteux état, etc., etc.

Je suis donc porté à considérer les dégâts commis dans cette région comme étant du type IX.

Rognes. — Dans ce village, l'aspect est peut-être plus lamentable encore, parce que tout un quartier de Rognes a été complètement détruit et qu'il n'en subsiste plus que des ruines; dans cette zone, aucun immeuble n'a été respecté (type IX).

Quelle que soit la part qu'il faille faire dans la catastrophe à l'état de vétusté très réelle des maisons, il n'en est pas moins certain que c'est à Rognes que l'intensité du tremblement de terre paraît avoir été maximum, et c'est dans la région Lambesc-Rognes que je serai amené à placer l'origine du tremblement de terre.

En effet, au delà de Rognes, les dégâts vont diminuer peu à peu.

Un grand nombre de fermes dans la direction de Puy-Sainte-Réparade sont démolies ; je citerai par exemple *Bastide-Neuve*, le château de *Brest*, la ferme de *Milhaude*.

Puy-Sainte-Réparade. — Plus loin, sur le territoire du Puy-Sainte-Réparade, certains points ont particulièrement souffert, comme l'Eglise-Vieille, Papety, la Cride, les Carias, etc. (type IX), tandis que l'agglomération même du Puy a relativement moins souffert (type VIII).

La vieille tour de Sainte-Réparade est crevassée et menace ruine. Les Théries sont démolis. On arrive ainsi vers la halte de Saint-Canadet, où se trouvent quelques maisons qui ont beaucoup souffert et dont les façades sud sont complètement tombées (en réalité, ces façades ne sont pas rigoureusement sud ; elles sont dirigées N.-W. S.-E.; il s'agit donc plutôt ici des façades S.-W. ou S.-S.-W.)

On a donc encore ici des points où l'intensité est presque du type IX. Au delà, on ne trouvera plus que des régions relativement moins éprouvées.

Meyrargues. — A Meyrargues, les dégâts ont été plus grands qu'on ne l'a cru; le village même de Meyrargues, église, château, etc., a

relativement peu souffert (type VII) ; mais les fermes situées autour, dans la plaine, sont en très mauvais état ; elles sont complètement lézardées, et beaucoup devront être démolies.

Il semble qu'en ce point l'intensité du tremblement de terre ait été assez analogue à celle qu'il a eu à Pélissanne et à Salon ; seulement, comme il s'agissait de maisons neuves, isolées, peu nombreuses, les dommages matériels ont fait moins d'impression (type VIII).

Peyrolles. — Au delà de Meyrargues l'intensité diminue très vite. A Peyrolles, il y a eu des dégâts assez nombreux ; il ne semble pas qu'il y ait danger à habiter les maisons (type VI).

Saint-Paul-les-Durance. — Il en est de même dans la localité située plus loin ; quelques maisons se sont lézardées ; aucune ne menace ruine ; la mairie et les écoles cependant ont assez souffert (type VI).

Résumé. — On arrive ainsi à l'extrémité de la zone éprouvée par le séisme et l'on voit que l'intensité du séisme croît à partir de Salon pour passer par un maximum vers Lambesc, Rognes et décroît ensuite vers Meyrargues.

VILLAGES DÉVASTÉS AU SUD DE LA ZONE TECTONIQUE

Mais les villages que je viens d'énumérer ne sont pas les seuls qui ont eu à subir les dégâts du tremblement de terre.

Il y en a au sud plusieurs autres qui ont été très éprouvés ; ce sont, par exemple : Saint-Cannat, Puyricard, Venelles, sur le bord du massif miocène de la Trévaresse, puis plus au sud le village d'Eguilles.

Saint-Cannat. — Ce village a été très douloureusement atteint ; on y compte dix morts, plusieurs blessés, et toutes les maisons du village ont plus ou moins souffert de la commotion. La partie la plus atteinte est le centre du village où se trouve l'église, qui a dû être démolie ; par contre certains faubourgs, en particulier celui de la route d'Aix, ont été moins éprouvés.

Toute cette zone où l'intensité du tremblement de terre a été considérable (type IX) se poursuit sur le bord de la Trévaresse, par Saint-Jean, Saint-Julien, Pontés, qui ont leurs toitures effondrées.

Puyricard. — On arrive ainsi à Puyricard, hameau qui dépend de la ville d'Aix et qui a beaucoup souffert.

Les habitations qui se trouvent au nord de Puyricard sont très atteintes ; l'agglomération de Mikely est complètement détruite ; mais, à mesure que l'on va vers le sud, les dégâts s'atténuent.

A Puyricard, il y a des crevasses très sérieuses ; les maisons sont

très endommagées ; plusieurs sont irréparables ; mais la plupart tiennent encore debout (type VIII) ; plus loin encore, on trouve des habitations où les dégâts sont presque insignifiants, de grosses lézardes qui n'affectent pas la solidité de l'immeuble, comme à la Madeleine ou à Célony.

On arrive ainsi aux régions où les dommages sont presque nuls, comme à Beaufort et à Aix.

Venelles. — Le village de Venelles est perché sur une colline assez élevée et est très atteint ; l'aspect des ruines rappelle un peu celui de Saint-Cannat ; beaucoup de maisons sont tombées ; les autres devront être démolies ; de l'église, il ne reste presque plus rien que le clocher que l'on a dû démolir (type IX). Beaucoup de fermes et de châteaux des environs ont également beaucoup souffert.

Mais, chose curieuse, les maisons du Bas-Venelles, sur la grand'-route, ont peu souffert ; elles sont cependant à 400 mètres à peine à vol d'oiseau de Haut-Venelles ; puis l'on passe immédiatement à la zone des dégâts à peu près nuls.

Il est très intéressant de voir ainsi l'un des pays les plus éprouvés, se placer presque exactement à la limite de la zone des dégâts.

Eguilles. — Il faut faire une mention assez spéciale à cette commune, parce que, parmi les villages éprouvés, c'est celui qui est situé le plus au sud.

L'église et l'ancien château menacent ruine et beaucoup de maisons sont crevassées : quelques-unes se sont encore écroulées.

Cependant, en somme, les dégâts ne sont pas très considérables (type VII ou VIII). Aux environs d'Eguilles, les hameaux sont assez éprouvés ; aux Avocats, presque toutes les maisons sont lézardées ; aux Figons, plusieurs ont leur toit effondré.

Comme à Venelles, on est ici presque à la limite de la zone protégée.

Aix. — Dans la ville d'Aix même, on a entendu un long bruit sourd ; la secousse a été très sensible et très nettement perçue par toutes les personnes assises au café. Les dégâts se sont réduits à peu de choses, quelques crevasses et quelques dégâts à la vermicellerie Augier et à l'église Saint-Jean-du-Faubourg (type VI).

CHAÎNE DE LA TRÉVARESSE

Si l'on ne considérait que les villages très atteints : Lambesc, Saint-Cannat, Puyricard, Venelles, Puy-Sainte-Réparade, on serait

amené à penser que la région épicentre se trouve au centre du cercle qu'ils forment, c'est-à-dire dans la chaîne de la Trévaresse, et en particulier à Beaulieu, ancien volcan oligocène, où l'on retrouve encore des coulées de basalte et des tufs basaltiques.

C'est effectivement une hypothèse qui a beaucoup séduit tout d'abord. Un seul géologue, d'ailleurs, M. A. Thévenin, paraît s'y être rallié. (*C. R. S. Soc. Géol.*, 24 juin 1909, p. 87). Les récentes recherches de sismologie paraissent, en effet, avoir montré qu'il n'y a pas de relation de cause à effet entre les tremblements de terre et les éruptions volcaniques (Voir en particulier E. Haug, *Traité de Géologie*, p. 342). J'ai indiqué moi-même (*C. R. Acad.* du 21 juin 1909) que les dégâts et les secousses, notés aux *alentours* de Beaulieu, étaient dus non au volcan, mais à des causes toutes locales.

Effectivement, si la chaîne de la Trévaresse et Beaulieu en particulier constituaient la région épicentre, c'est là qu'on devrait trouver les points les plus ébranlés ; or, sans me contenter des récits des journaux et en parcourant personnellement le pays, j'ai pu me convaincre que seuls les bords de la chaîne de la Trévaresse avaient été endommagés et que le sommet de cette rangée de hauteurs l'était relativement peu.

Ainsi, lorsque l'on va de Puyricard à Puy-Sainte-Réparade, on traverse une zone où les dégâts sont moins importants qu'ils ne le sont au nord ou au sud.

Les Peyres, sur la route de Puyricard à Puy-Sainte-Réparade, n'ont pas de dommages très graves ; il en est de même de Pontier.

La Denise et la Sibérie, à l'ouest de la ligne qui va de Saint-Canadet à Venelles, sont peu atteints.

On a la même impression lorsque l'on suit la route de la gare de Lignane-Rognes au village de Rognes.

Le Jas-d'Amour et Barbebelle, entre Rognes-Village et Rognes-Station, sont gravement atteints ; mais, quoique très délabrés, ils ne témoignent pas d'une intensité analogue à celle que l'on observe dans la plaine de Rognes-Village, ou dans celle de Rognes-Station.

De même, si Olivary et Dupail sont presque complètement détruits, le château de Cabane est moins endommagé ; il semble que ce soit surtout les étages supérieurs qui aient souffert.

Mais que dire du château et de la ferme de Beaulieu, soi-disant épicentre du phénomène? Là les dégâts extérieurs sont presque nuls, et la secousse paraît avoir été relativement peu intense. Dans la chapelle du château, les vases sont restés en place; seule la croix

haute et mal équilibrée est tombée. Dans le château, les lampes, les vases, les bouteilles, les bustes n'ont pas bougé; ce n'est qu'au deuxième étage que l'on aperçoit quelques objets mobiles, en petit nombre, renversés et quelques cassures. Le clocheton du château est tombé ; mais il était en réparation.

Dans la ferme attenante au château, les dégâts sont également insignifiants. Ce contraste est d'autant plus frappant qu'au-dessous du château de Beaulieu d'autres fermes appartenant au même propriétaire, M. de Candolle, ont beaucoup souffert, par exemple Milhaude et Tournefort, ainsi qu'un château paraissant solide, le château de Brest. Mais là on se rapproche de Rognes, et de plus on passe d'un sous-sol basaltique résistant à un sous-sol argilo-sableux extrêmement défavorable aux constructions en pays sujet aux séismes.

Résumé. — Il résulte de ces faits que l'on ne saurait considérer comme région épicentre la chaîne de la Trévaresse et le petit pointement basaltique de Beaulieu ; bien au contraire, ces points forment une sorte d'îlot des types VIII et VII au milieu de la zone du type IX.

Il faudra d'ailleurs chercher à expliquer la cause de cette curieuse disposition.

MASSIF STABLE DE L'EST

A l'est de cette région dévastée se trouve un massif montagneux, constitué par des calcaires secondaires. Ce massif peut s'appeler le massif du Grand-Sambuc.

Il paraît être resté assez stable. J'ai déjà signalé que la portion du village de Meyrargues, située sur ce massif, a résisté assez bien; c'est ainsi que les très vieilles maisons absolument délabrées qui se trouvent sous le château n'ont presque pas souffert; le très aimable maire de Meyrargues, M. Sumian, a résumé ainsi son impression : « Tout ce qui est vraiment sur le rocher n'a rien eu. »

Le reste du massif est peu habité ; cependant on y trouve quelques maisons ; le garde champêtre de Meyrargues en avait visité quelques-unes. Le Campane et Parrouvier n'avaient rien ; sur une autre, le Davoust, on n'avait pas de renseignements, ce qui prouve qu'elle n'était pas gravement atteinte.

Ce n'est qu'au sud de ce massif dans une dépression synclinale où s'alignent quelques lambeaux de miocène que l'on retrouve des villages Saint-Marc et Vauvenargues. Les dégâts y sont d'ailleurs peu considérables.

Il résulte de ces faits que le massif de calcaires secondaires du Grand-Sambuc a peu souffert et que, par suite, il doit être considéré comme un massif stable.

MASSIF STABLE DE L'OUEST

A l'ouest de cette région dévastée, se trouve placé d'une façon à peu près symétrique un second massif de calcaires secondaires qui paraît avoir été également assez stable.

Au sud de Saint-Cannat, la région atteinte s'étend à peu près jusqu'à la Touloubre qui forme la limite des terrains tertiaires et secondaires. Sur la rive droite de la Touloubre, en terrain tertiaire, les fermes de Puits de Mourel, de la Touloubre, de la Montaurone sont plus ou moins gravement atteintes.

Sur la rive gauche, la bergerie des Barons n'a pour ainsi dire pas souffert et un berger qui y couchait aurait même à peine ressenti le secousse (ce dire est à comparer avec celui qu'on m'a rapporté de Poncerot sur le massif, calcaire stable du Nord). De même, sur ce massif, les bâtiments de Gay et de Camaïsse n'ont pas grand'chose. Mais peut-être les Quatre-Temps et la Bastide du Loup sont-ils un peu atteints.

Lançon. — Sur ce massif calcaire, le cas de Lançon est particulièrement intéressant, parce que c'est l'un des rares villages qui s'y trouvent.

Or il y a bien quelques dégâts à Lançon (type VI), mais si peu que le maire a refusé les secours qu'on lui offrait.

Nous sommes donc, là encore, en présence d'un massif qui a très peu bougé et que l'on doit considérer comme stable.

ZONE AFFECTÉE AU SUD DE SALON

On doit le faire d'autant plus que la région à l'ouest de ce massif n'a pas été aussi respectée que lui.

Le tremblement de terre ne paraît pas avoir beaucoup affecté la Crau, qui semble avoir joué le rôle de tampon ; par suite il n'a guère dépassé Salon à l'ouest (1) ; mais, au sud de Salon, se trouvent, en dehors du massif calcaire, sur le miocène, quelques villages qui ont été touchés.

Je citerai d'abord *Grans*. Il n'y a eu aucune victime ; mais les dégâts matériels sont importants ; le clocher est à moitié démoli ;

(1) Le hameau de la Crau et quelques campagnes de la commune de Salon, à peu près jusqu'au champ de courses, sont encore très fortement lézardés.

les écoles ont été endommagées ; l'ancien presbytère devra probablement être jeté bas (type VII).

Cornillon. — Cette commune n'a pas été épargnée par le tremblement de terre. Toutes les maisons ont souffert de l'ébranlement général ; quelques-unes sont devenues inhabitables, l'église a été fortement atteinte, et la sacristie a été complètement détruite (type VII de Mercalli).

Enfin, à *Miramas*, sur l'étang de Berre, quelques maisons, assez vieilles d'ailleurs, ont assez souffert pour que l'on doive les abattre complètement (type VI).

Telles sont, rapidement résumés, les faits sur lesquels on peut s'appuyer pour avoir une notion de l'allure des courbes isoséistes, celles-ci ont d'ailleurs forcément un caractère schématique ; mais, malgré cela, je crois qu'elles résument assez bien l'idée que l'on peut se faire des ravages causés par le tremblement de terre.

III

Relation des zones dévastées avec les accidents tectoniques (1).

Il y a longtemps que l'on a abandonné l'idée trop théorique qui faisait que l'on considérait comme un point l'origine d'un tremblement de terre. La plupart des sismologues semblent penser maintenant que les tremblements de terre sont en relation avec les dislocations de l'écorce terrestre.

A cet égard, le tremblement de terre de Provence me paraît particulièrement typique (2). Il résulte en effet des observations qui viennent d'être relatées une coïncidence très nette entre les zones dévastées et les accidents tectoniques.

On remarquera, en effet, que la plupart des villages atteints se trouvent à peu près en ligne droite : Salon, Pélissanne, Lambesc, Rognes, Puy-Sainte-Réparade. Or, cette ligne droite coïncide avec une grande faille qu'indique de la façon la plus nette la carte géolo-

(1) Paul Lemoine, *Sur les relations tectoniques du tremblement de terre de Provence* (*C. R. Acad. Sc.* CXVIII, 21 juin 1909, pp. 1696-1698).

(2) Voir en particulier Montessus de Ballore, *la Science sismologique* (1907, p. 456, admet « le fait que, par les grands tremblements de terre, les compartiments terrestres se meuvent contre les dislocations qui les limitent pour retrouver par réajustement leur équilibre rompu ou mal assis ».

E. Haug (*Traité de géologie*, 1907, p. 331) est arrivé à la même conclusion et « de plus en plus, dit-il, s'impose à nous la certitude que les tremblements de terre ne sont autre chose que des mouvements de l'écorce terrestre, assimilables de tous points aux mouvements orogéniques ».

gique détaillée publiée vers 1889 par le ministère des Travaux publics. Suivant cette ligne, les dépôts miocènes viennent buter brusquement contre les couches calcaires, d'âge secondaire, souvent redressées jusqu'à la verticale. Cette faille a été reconnue et marquée par L. Collot entre Pélissanne et Lambesc. Au delà elle est marquée par les dépôts miocènes ; elle ne réapparaît guère qu'à Rognes. Là, entre Rognes et Puy-Sainte-Réparade, une petite bande de Rognacien (crétacé) supérieur vient s'intercaler sur le bord du massif calcaire, d'âge crétacé inférieur.

L'existence de cette grande ligne de faille est donc indiscutable.

Son rôle sismogénique paraît extrêmement probable ; c'est sur elle en effet que s'alignent les points les plus atteints.

La portion de Rognes, qui a été détruite, se trouvait exactement sur le prolongement du contact anormal Néocomien-Rognacien.

Il est curieux de constater que c'est dans la région où la faille est masquée que les dégâts sont les plus intenses, c'est-à-dire entre Lambesc et Rognes, comme si l'existence de dépôts miocènes à la surface des terrains calcaires avait contribué à augmenter l'intensité du mouvement.

C'est d'ailleurs dans cette zone que l'on a observé les rares secousses prémonitoires et les plus nombreuses secousses postérieures à celles du 11 juin.

Sur une autre ligne droite, coïncidant également avec une faille, se trouvent les villages de Mouriès, Aureilles, Eyguières, Mallemort, Alleins, Charleval, la Roque-d'Anthéron, qui, quoique moins éprouvés que les précédents, ont été cependant assez atteints.

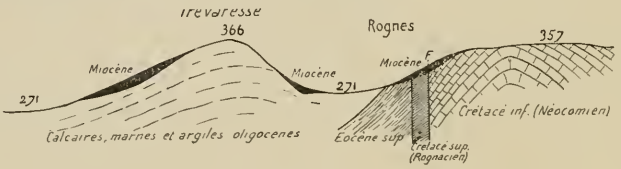


Fig. 2.

Coupe schématique à hauteur de Rognes, montrant l'accident tectonique (F) qui fait buter le Tertiaire (Oligocène, Eocène) et le Crétacé supérieur contre du crétacé inférieur.

Cet accident a été supposé vertical pour simplifier le schéma.

On est donc amené à penser que le tremblement de terre de Provence est dû à la tendance qu'aurait eu à remuer le compartiment des calcaires massifs qui constituent la Chaîne des Côtes, entre les

deux failles que je viens de signaler, cette faille a joué nouveau, à peu près comme lorsque les fissures d'un vieux meuble se mettent à jouer et à crier.

Ces failles étaient dirigées grossièrement de l'est vers l'ouest, le mouvement du compartiment de l'écorce terrestre compris entre ces deux failles a dû se faire du nord vers le sud (ou du sud vers le nord). Cette hypothèse concorde bien avec le fait d'observation que ce sont précisément les façades nord et sud qui sont le plus atteintes (voir plus loin).

Il ne faudrait pas s'exagérer l'importance de ce mouvement; car, si grands qu'ils soient, les ravages sont peu de chose en comparaison de ceux de San-Francisco. Là cependant la faille, accident sismogénique, n'avait joué que de quelques centimètres.

Mais, même pour un mouvement minime, la poussée produite par tout un compartiment de l'écorce terrestre est formidable; elle a mis en branle tous les pays voisins, à peu près comme un caillou que l'on jette dans une mare détermine dans l'eau une série d'ébranlements qui vont en se répercutant jusqu'au bord.

En effet, ce mouvement du compartiment de l'écorce terrestre qu'est la Chaîne des Côtes n'a été que la cause du séisme et, comme je tâcherai de le montrer plus loin, l'ébranlement causé par ce mouvement, en se propageant vers le sud, y a causé de très grands dégâts.

Enfin, en faveur de l'hypothèse qui mettrait la région épicentre sur la faille sud de la Chaîne des Côtes et plus particulièrement entre Lambesc et Rognes, j'ajouterai ce fait que sur la zone au nord l'intensité du tremblement de terre semble croître de l'est vers l'ouest pour être maximum à hauteur de Charleval et de la Roque-d'Anthéron, précisément en face du maximum (Lambesc, Rognes) de la ligne précédente.

Je suis donc ainsi amené à émettre l'hypothèse que le tremblement de terre de Provence est d'origine tectonique et qu'il est dû plus particulièrement au jeu de la faille du sud de la Chaîne des Côtes.

Tout se serait donc passé comme si un mouvement d'avancée du nord vers le sud des massifs calcaires, et en particulier de la Chaîne des Côtes au nord de Lambesc et de Rognes avait eu lieu. Ce mouvement aurait eu une tendance à écraser les régions miocènes plus faibles, tandis que les massifs calcaires restaient relativement plus stables ou tout au moins ne subissaient pas de mouvements ondulatoires de grande étendue.

ORIGINE DES DÉGATS AU SUD DE LA ZONE SISMOGÉNIQUE

Cet ébranlement du massif calcaire a fait naître, à partir de la ligne d'ébranlement, une série de secousses ondulatoires qui se sont propagées à la façon des ondes que la chute d'un caillou fait naître dans un bassin.

Ces ondes sismiques ont évidemment été plus importantes et plus dévastatrices dans la région épicentre, là où se trouvent les villages les plus affectés.

Au fur et à mesure qu'elles s'éloignaient de cette région épicentre, elles ont rencontré les deux massifs stables, calcaires, de l'est et de l'ouest. Ceux-ci ont peut-être bougé un peu ; mais ils se sont opposés à la translation facile des ondes sismiques.

Ces ondes sismiques, obligées de se resserrer entre les deux massifs calcaires, au nord-est et au nord-ouest d'Aix, sont devenues plus violentes dans l'espèce de cul-de-sac ainsi formé et y ont produit de grands dégâts, détruisant les villages de Saint-Cannat, Puyricard, Venelles. Je ne saurais mieux comparer le phénomène qu'à celui qui se produit dans le cul-de-sac du Mont-Saint-Michel, où l'effet de la marée atteint, on le sait, son maximum.

Le même phénomène a dû se produire au sud de Salon, entre le massif calcaire de l'Ouest et le Crau ; mais il a été moins intense, parce que l'ébranlement originel était beaucoup moins fort dans cette région.

Quelle est la nature de ces ondes sismiques ? On ne sait trop. Lord Rayleigh (1) a étudié autrefois des ondes superficielles élastiques, analogues à celles qui se propagent dans un liquide et pour lesquelles l'élasticité joue le même rôle que la gravité pour ces dernières.

D'après Montessus de Ballore (*la Science sismologique*, p. 362), ces ondes sismiques de Rayleigh joueraient le principal rôle dans les macroséismes. Il admet que la vitesse de ces ondes est de 2.800 à 3.000 mètres par seconde.

En vertu de l'hypothèse, d'après laquelle les dégâts sont dus à des ondes sismiques superficielles, j'ajouterai que, dans les galeries de mines, le tremblement de terre a été à peine ressenti.

Déjà on prétend qu'à Céloni, dans les plâtrières, les ouvriers n'ont rien ressenti et qu'aucun outil n'a bougé.

(1) Lord Rayleigh, *On waves propagated along the plane surface of an elastic surface* (*Proc. London math. Soc.*, 1885, XLVII).

A Gardanne, j'ai pu avoir des données dignes de foi. M. Domage, directeur de la Société des Charbonnages des Bouches-du-Rhône, a bien voulu faire à cet égard une enquête, et il écrit ceci :

« Je me suis rendu à la mine pour avoir des renseignements précis sur les effets ressentis à l'intérieur de la mine, lors du tremblement de terre.

« A Gardanne, les ingénieurs qui ont vu chez eux les murs trembler affirment que les ouvriers qui étaient au fond leur ont assuré n'avoir senti aucune secousse.

« A Valdonne, l'ingénieur m'a dit :

« Dans la mine, les ouvriers ne se sont aperçus de rien.

« A l'extérieur, dans les villages voisins de la mine, Cadolive, « Saint-Savournin, Gréasque, on a senti des secousses. A Fuveau, « village plus éloigné, 6 kilomètres des puits, les secousses se sont « fait sentir, les cloches ont sonné, les pendules se sont arrêtées.

« Pas de dégâts nulle part. »

J'ajouterai d'ailleurs que le fait n'est pas isolé et que l'on a bien souvent remarqué que les tremblements de terre étaient ressentis dans les mines avec beaucoup moins de violence et souvent même ne l'étaient pas du tout. Des expériences directes ont montré également cette diminution de l'intensité du séisme avec la profondeur (1).

Il en résulte un enseignement pratique, la nécessité de descendre les fondations.

SECOUSSES ANTÉRIEURES ET PRÉMONITOIRES

M. Bigourdan, dans une très intéressante note, a fait remarquer que la région détruite par le tremblement de terre ne semblait pas, de mémoire d'homme, avoir subi de secousses analogues.

Rien n'est plus exact ; cependant quelques faits semblent indiquer que cette région a été susceptible d'ébranlement.

Tout d'abord l'étymologie du mot Rognes signifierait ruines (*Castrum de ruinis*).

On a raconté également sur le domaine de la Pomme, route de Lambesc au Caire, une légende curieuse : Cette maison avait la réputation d'être hantée et d'être devenue le lieu de réunion des êtres infernaux. Un soir cependant, quelques courageux des villages voisins étaient partis armés de gourdins ; mais à quelques cents mètres

(1) Seikiya, *Comparison of earthquake measurements made in a pit and on the surface ground* (*Journ. Coll. Sc. Imp. Univ. Tokyo*, 1891).

de l'habitation hantée, ils avaient été pris d'un tremblement nerveux et s'en étaient retournés en courant. Un jour, un prêtre devient le propriétaire de la Pomme-de-Pin; en grande pompe, il vint bénir sa nouvelle maison pour en chasser les esprits; il fit réparer la maison, et un ménage vint s'y installer; ils étaient courageux et ne croyaient pas les histoires qu'on leur racontait. Cependant parfois leur maison tremblait. Légende, évidemment; mais légende curieuse car il est bien probable qu'au fond de toute légende il y a un peu de vérité: or le domaine de la Pomme est exactement sur le passage de la faille masquée qui relie Lambesc à Rognes.

En dehors de ces faits légendaires, j'ai pu recueillir dans le pays quelques données sur les secousses ou les grondements qui ont précédé le tremblement de terre; elles pourront évidemment être complétées et discutées; je les donne pour ce qu'elles valent[1].

23 février 1887[2]. — 5 heures du matin. — Puy-Sainte-Réparade. — Frémissement des verres; un grand bruit l'a précédé.

23 février 1887. — 11 heures et demie du matin. — Puy-Sainte-Réparade. — Frémissement des verres; un grand bruit l'a précédé.

Novembre 1906. — Mirabeau, Cordier, Saint-Paul (panique).

Novembre 1907. — Eyguières. — Détonations souterraines.

7 janvier 1908. — 8 heures soir. — Mirabeau, Beaumont, Saint-Paul et peut-être Puy-Sainte-Réparade.

J. 25 mars 1909 [3]. — 9 heures soir. — Puy-Sainte-Réparade. — Une petite secousse.

V. 28 mai 1909. — Saint-Canadet. — Bruit souterrain.

Me. 9 juin 1909. — Papety (commune de Puy-Sainte-Réparade). — Le matin, grondements. — L'après-midi, bruits plus forts.

Répliques. — On sait qu'un grand tremblement de terre n'est jamais un phénomène isolé et qu'il est presque toujours suivi par des secousses postérieures, ou *répliques*, dont le nombre est souvent très grand.

On conçoit, en effet, qu'à la suite de la secousse causée par le tremblement de terre, la région ébranlée ne puisse reprendre immédiatement son équilibre.

(1) En relation avec le tremblement de terre des Alpes-Maritimes et de Ligurie (23 février 1887).

(2) Cette secousse aurait été relatée par *le Petit Marseillais* du 26 mars 1909; mais on n'y a attaché aucune importance.

(3) Voir aussi Bigourdan, *Sur quelques tremblements de terre qui ont dévasté la Provence et le Dauphiné* (*C. R. Acad. Sc.*, 14 juin 1909, p. 1568-1570): tremblements de terre en 1282, 1644, 1731, 1738, 1769, 1772-1773, 1799, 1812.

Ces répliques ont le grand inconvénient d'affecter le moral des populations éprouvées et d'entretenir la terreur parmi elles.

Il serait très intéressant de pouvoir déterminer la liste de ces répliques pour le tremblement de terre de Provence et de pouvoir tracer pour quelques-unes d'entre elles les courbes isoséistes; malheureusement les résultats que j'ai recueillis sont tout à fait insuffisants dans ce but ; je les donne cependant, pensant que, sur des questions comme celles-là où les documents sont si difficiles à réunir, il n'y en a jamais trop.

J'espère aussi qu'ils pourront servir à en compléter d'autres, recueillis par d'autres observateurs. Ils permettront peut-être aussi à quelques-uns de se retrouver dans les dates de ces secousses (1).

Liste des répliques actuellement connues (2)

V. 11 juin. — 9h,15 du soir. — Partout. — Secousse principale.
9h,40 du soir. — Partout. — Deuxième secousse principale.
12 heures. — Mouriès, grondements sourds.
S. 12 juin. — 1 heure 1/2 du matin. — Rognes.
3 heures du matin. — En Camargue, une secousse aurait été sentie par des gens venant au marché d'Arles.
5 heures du matin. — Meyrargues, ressentie par tout le monde. — Puy-Sainte-Réparade, secousse nette.
7 heures du matin. — La Madeleine, près Aix, frémissements.
9h,40 du matin. — Rognes (une secousse a été signalée à 9h,45 à Castres, sur l'Agout!).

(1) Les données relatives aux Décanis-Barré (les Décanis d'après la carte d'Etat-major; Barré, d'après la dénomination actuellement usitée dans le pays), commune de Puy-Sainte-Réparade, m'ont été communiquées par M. Turcon, régisseur, qui les avait consignées sur son carnet au fur et à mesure.

Celles relatives à Rognes m'ont été fournies par le capitaine Barbarin, commandant la compagnie du 7e génie, détachée dans ce village; cet officier les a également notées au fur et à mesure qu'elles se produisaient. Quelques autres sont dues aux renseignements de M. Poutet, correspondant du *Petit Marseillais* à Rognes.

Les observations faites au château de Brest (commune de Rognes) sont dues à M. de Salves, propriétaire de ce château.

A Puyricard, j'ai noté les dates dont se souvenait M. Bataille, directeur des écoles.

A Saint-Canadet (commune de Puy-Sainte-Réparade), j'ai recueilli les observations de M. Decanis, conseiller municipal, représentant ce hameau.

A Meyrargues, M. Sumian, maire, a bien voulu me faire part de ses remarques.

(2) Je donne les heures de ces répliques, telles qu'elles m'ont été fournies. On constatera souvent les divergences sensibles dans ces heures, qui ont rarement été notées avec précision.

D. 13 juin. — 2 heures du matin. — Les Décanis (Barré).
5h,30 du matin. — Meyrargues, sentie par tout le monde ; rien n'a été cassé (vers 5 heures). — Pertuis, sentie par quelques personnes au repos, éveillées (vers 5 heures). Puy-Sainte-Réparade (5h,30, une maison s'est écroulée), Puyricard, les Décanis-Barré (5h,20), la Madeleine, près Aix (2 secousses légères dans la matinée).
9 heures du matin. — Puy-Sainte-Réparade (entre 9 heures et 9 heures et demie) ; les Decanis-Barré (9h,15 ; secousse très forte ; panique d'un habitant) ; Puyricard (8h,30) ; Saint-Canadet (matinée).
12h,30 du soir. — Les Decanis-Barré ; peut-être à Saint-Canadet (après-midi).
7h,10 du soir. — Puy-Sainte-Réparade (produit une vive émotion ; deux autres ont eu lieu dans l'après-midi).
8h,20 du soir. — Les Décanis-Barré.

L. 14 juin. — 4h,30 du matin. — Les Décanis-Barré (forte).
7 heures du matin. — Les Décanis-Barré (forte).
10 heures du matin. — Les Décanis-Barré (violente ; deux autres à 10h,05 et 10h,35 du matin).
12h,20 du soir. — Les Décanis-Barré.
7h,55 du soir. — Les Décanis-Barré.

Ma. 15 juin. — 4h,15 du matin. — Les Décanis-Barré.
7 heures du matin. — Les Décanis-Barré.
12h,32 du soir. — Les Décanis-Barré.

Me. 16 juin. — 1 heure à 2 heures du matin. — Région de Toulon (secousse courte et légère signalée par les journaux).
3 heures 1/2 à 4 heures du matin. — Alleins.
11h,50 du matin. — Puy-Sainte-Réparade.
3h,45 du soir. — Puy-Sainte-Réparade (sentie par beaucoup de personnes, a fait écrouler l'Église-Vieille) ; Saint-Canadet (3h,45 du soir), les murs tremblent ; un peu de panique.
10h,34 du soir. — Saint-Cannat (forte secousse : quelques meubles auraient été renversés au passage à niveau). — à Papety, on aurait ressenti 9 secousses dans cette journée.

J. 17 juin. — 3 heures du matin. — Rognes (a remué les bouteilles) ; Saint-Cannat.
11 heures 1/4 du soir. — Rognes. — On signale deux petites secousses à Puy-Sainte-Réparade ; il y en aurait eu toute la journée à Papety.

V. 18 juin. — 2 heures du matin. — Château de Brest (commune de Rognes).
3 heures 1/2 du matin. — Papety.
5 heures 1/2 du matin. — Rognes (5h,20, forte secousse ; a descendu les bouteilles d'une cave ; les fentes se sont élargies) ; Brest (5h,21, un pilier étagé se renverse sur son étais ; les lits bougent dans les ténèbres ; la ferme de la Demoiselle souffre plus que lors de la secousse princi-

pale); Papety; Celony (vers 5 heures), Touloubre (5h,20 ; frémissements; rien de cassé).

9h,20 du matin. — Pertuis.

10h,20 du matin. — Rognes.

S. 19 juin. — 1h,34 du matin. — Rognes (heure donnée par le *Petit Journal;* les habitants m'ont dit vers 2 heures); château de Brest (vers 2 heures).

8 heures du matin. — Rognes et ferme de Raimbaud ; Puyricard.

Soirée. — Saint-Canadet.

D. 20 juin. — 2 heures du matin. — Rognes (château de Brest); Puy-Sainte-Réparade (2h,10).

5 heures 1/2 du matin. — Puyricard (les bouteilles ont tinté) ; Saint-Canadet (vers 5 heures).

8h,50 du matin. — Puyricard; Saint-Canadet (vers 9 heures).

L. 21 juin. — 2 heures du matin. — Château de Brest (secousse assez forte) ; Rognes (ressentie par quelques personnes).

V. 25 juin. — 3h,37 du soir. — Lambesc (heure notée en séance du Comité de secours); Saint-Cannat; Rognes (des meubles auraient été déplacés; cette secousse est la seule des répliques qu'a ressentie l'instituteur).

Me. 30 juin. — 5 heures du matin. — Pertuis (ressentie par quelques personnes couchées) ; Puyricard (les lits roulaient).

Les secousses ont continué après le 30 juin ; mais ayant quitté le pays, il ne m'a pas été possible d'en recueillir la liste. J'espère cependant pouvoir compléter celle-ci sous peu.

On remarquera le très grand nombre de ces répliques (plus de quarante en vingt jours; on sait qu'en Calabre Mercalli en a noté environ 100 dans les trois premiers mois (1).

On constatera que beaucoup de ces secousses ne sont signalées qu'en un ou deux points. Cela ne signifie pas qu'elles n'aient pas été ressenties plus ou moins légèrement un peu partout ; mais on n'a pas eu toujours l'attention de les noter et surtout on a fait le silence sur la plupart d'entre elles.

Il est à remarquer cependant que la plupart des répliques n'ont été ressenties que dans la région Lambesc, Rognes, Saint-Cannat, Puyricard ; quelques-unes l'ont été à Meyrargues et à Pertuis.

Il semble que dans la région ouest, en particulier à Salon (renseignement de M. Laugier, directeur des écoles) et à Grans, on n'ait pas ressenti de répliques, au moins d'une façon appréciable.

Il n'y a d'ailleurs là rien qui doive nous étonner ; car on sait que les épicentres des répliques successives ne coïncident pas toujours

(1) Mercalli, *Sur le tremblement de terre calabrais du 8 septembre* 1905 (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 14 janvier 1907).

avec celui du tremblement de terre principal et qu'ils voyagent sans loi apparente à la surface de la région la plus fortement ébranlée. Je crois, en particulier que les nombreuses petites secousses, ressenties aux environs de Puy-Sainte-Réparade, par exemple, à Papety, aux Décanis-Barré,etc., sont tout à fait locales et tiennent à la nature du sol, grès et marnes feuilletés avec intercalations gypseuses essentiellement instables où se produisent de petits tassements.

IV

Effets du tremblement de terre

EFFETS SUR L'HOMME

Les différentes personnes que j'ai interrogées ont été d'accord pour déclarer avoir senti d'abord un mouvement vertical de haut en bas, puis des mouvements horizontaux ondulatoires dirigés dans des sens divers.

En plusieurs points, on m'a affirmé que ce mouvement avait été nord-sud ; cette affirmation concorde assez bien avec ce que j'ai constaté des effets du tremblement de terre sur les constructions.

BRUITS SOUTERRAINS

Les bruits souterrains qui accompagnent souvent les tremblements de terre ont été entendus de la façon la plus nette.

A Aix, ce fut un long bruit sourd, à Lambesc, plutôt des bruits d'écrasement et de ferrailles ; dans la région de Rognes, Puy-Sainte-Réparade, plutôt de longs grondements.

Enfin, en quelques points, en particulier à la Madeleine (entre Puyricard et Aix), les habitants m'ont déclaré n'avoir entendu aucun bruit, autre que celui des objets qui résonnaient.

A Meyrargues, le bruit aurait précédé un peu la secousse principale ; un second bruit aurait été ressenti au moment de la secousse de $9^h 40$.

A Brest, le bruit formidable et la secousse auraient été simultanés.

ACTION SUR LES SOURCES

Un assez grand nombre de sources du pays ont subi l'action du tremblement de terre, soit qu'elles aient tari, soit qu'au contraire

leur débit ait augmenté; voici les données que je possède à cet égard.

Meyrargues, à l'ouest du pays; probablement due au contact des calcaires néocomiens et des argiles rouges éocènes. — La source a tarie.

Saint-Canadet, commune de *Puy-Sainte-Réparade ;* dans les alternances d'argiles et de calcaires oligocènes. — La source du village a augmenté son débit dans de grandes proportions (peut-être décuplé) ; dans le ravin au sud, dans les mêmes conditions géologiques, plusieurs petites sources ont augmenté de débit ; d'autres sont venues au jour.

Les Décanis-Barré, commune de *Puy-Sainte-Réparade*, mêmes conditions géologiques. — La source a doublé de débit ; une autre source s'est formée à 20 ou 30 mètres plus haut.

Papeiy, commune de *Puy-Sainte-Réparade;* mêmes conditions géologiques. — La source captée pour le domaine a tari presque complètement ; une autre paraît s'être formée à une dizaine de mètres en contre-bas.

La Javie, commune de *Rognes ;* dans la mollasse marine à *Ostrea crassissima*. — La source a diminué.

Grand-Saint-Paul, commune de Rognes ; mêmes conditions géologiques. — La source a augmenté, elle remplissait un bassin en 20 jours ; elle le remplit actuellement en 2 jours (débit décuplé).

Le Caire, commune de Rognes ; mêmes conditions géologiques. — Le débit a diminué.

Eguilles. — Dans les alternances d'argile et de calcaires oligocènes. — Un puits de 30 mètres s'est tari. Un autre, à côté, autrefois à sec, s'est rempli d'eau.

De plus, un très grand nombre de sources de la région sont devenues troubles : le point le plus méridional qui m'a été signalé à cet égard est *la Fare*.

Ces faits s'expliquent facilement ; le tremblement de terre a obstrué certaines voies souterraines parcourues par les eaux des sources et des émergences, amenant le tarissement de celles-ci. En d'autres points, elle les a désobstruées, facilitant ainsi à l'eau sa venue au jour.

ORIENTATION DES DÉGATS

L'orientation des dégâts est souvent aussi un critérium utile.

Dans la région sinistrée, elle m'a paru assez typique ; ce sont, en général, les façades sud et nord qui sont les plus atteintes.

Le fait est particulièrement typique sur la route de Meyrargues à Puy-Sainte-Réparade, près de la halte de Saint-Canadet.

A Rognes, bien que presque tous les immeubles soient détruits, il semble bien que les façades nord et sud soient plus abîmées.

A Saint-Cannat, le fait est assez net; dans beaucoup de maisons, les façades nord et les façades sud sont tombées ; les façades est et ouest, venant alors à manquer d'appui, ont eu une tendance à se mettre en surplomb. Dans ce cas, leur démolition est nécessaire.

Au sommet du clocher de Pertuis, ce sont les murs côté nord et sud qui ont été disjoints.

On ne peut citer à l'appui de cette thèse les églises, à cause de leur orientation à peu près constante : les façades nord et sud, étant parallèles à la nef, sont naturellement moins résistantes, et il n'y a pas lieu de les voir fréquemment en mauvais état.

De même, on peut objecter que les façades sud se sont effondrées à cause de l'orientation naturelle des maisons dans le sens est-ouest. D'autre part, on peut toujours craindre qu'il n'y ait une certaine suggestion dans deso bservations de ce genre ; l'hypothèse une fois émise, on finit par ne remarquer que les façades sud et nord.

Je citerai donc seulement le cas du pigeonnier de Saint-Canadet, commune de Puy-Sainte-Réparade qui, étant circulaire, n'a aucun côté privilégié ; ce sont les bords nord et sud qui sont abîmés.

APPARENCE DE MOUVEMENTS GIRATOIRES

Comme dans la plupart des tremblements de terre, on peut observer des apparences de mouvements giratoires. Des objets lourds ont tourné sur eux-mêmes et changé leur orientation, sans subir de mouvement de translation important.

A Rognes, le capitaine Barbarin m'a signalé que deux petits pinacles surmontant l'église de Rognes, pierres octogonales, ont tourné de 22° environ.

A Lambesc, le buste de la République a également tourné sur son socle d'un angle voisin de 45°.

A Salon, l'une des pierres couronnant un chapiteau de l'hôpital est tombée ; le socle a tourné d'un angle voisin de 15°.

Des phénomènes analogues ont été observés dans la plupart des tremblements de terre ; mais, comme l'a fait observer Fouqué, en les décrivant à propos du tremblement de terre d'Andalousie, ils n'impliquent nullement l'existence de forces comme celles qui d'ordinaire produisent les mouvements de rotation ; il s'agit simplement de

forces horizontales qui agissaient sur des objets fixés par un point, non situé sur la verticale du centre de gravité; par suite ces objets sont amenés nécessairement à se déplacer autour de ce point de fixation.

EFFETS SUR LE SOL

Les effets produits par le tremblement de terre sur le sol se réduisent à peu de chose.

A Meyrargues, dans une prairie située un peu à l'ouest et en face du village, d'énormes blocs de rocher ont été déracinés et ont roulé dans les champs; par contre, à quelques centaines de mètres de là, dans une carrière, les dégâts ont été nuls.

A Rognes, les rochers dits du Foussa qui dominent le village et supportaient le vieux château présentent quelques crevasses fraîches, et des parties assez considérables se sont éboulées.

Il en a été de même à Vernègues.

A Salon, on a signalé une crevasse assez profonde ouverte dans le sol.

Il en a été de même sur certains remblais du chemin de fer, aux abords de Lambesc.

Mais, dans tous ces cas, il ne s'agit pas de véritables fissures, mais de fentes qui ont été produites par des affaissements locaux du terrain, à la suite des secousses. Ils auraient tout aussi bien pu survenir à la suite d'une grande pluie ou de toute autre cause semblable. Ce sont des effets du tremblement de terre, au même titre que les crevasses des édifices; mais aucun de ces phénomènes n'est lié nécessairement à la cause du tremblement de terre.

V

Influences des divers facteurs sur les dégâts causés par le tremblement de terre.

Lorsqu'on examine de près les dégâts produits par le tremblement de terre, on constate dans leur distribution des anomalies assez curieuses que l'on peut attribuer à l'influence de divers facteurs.

INFLUENCE DU SOUS-SOL

La différence de stabilité et d'élasticité des sous-sols joue certainement un rôle considérable. J'ai déjà indiqué comment les massifs de calcaires crétacés avaient été à peu près épargnés.

Cette corrélation se poursuit jusque dans le détail.

Ainsi, le château de Beaulieu qui a peu souffert (voir précédemment) doit sa préservation à la nature solide de son sous-sol (basalte).

INFLUENCE DE L'ALTITUDE

On pourrait croire que l'altitude relative des différents points joue un rôle dans l'importance des dégâts.

C'est ainsi que Vernègues et Venelles, qui sont parmi les villages les plus dévastés, sont situés sur des collines élevées, tandis que les points situés au-dessous d'eux (Alleins ou la Maison-Basse pour Vernègues, Venelles-Bas) n'ont que des dommages insignifiants. Je ne dis pas que l'altitude ne puisse avoir une certaine influence ; mais, dans tous ces cas, la différence de nature géologique du sol me paraît avoir joué un rôle prépondérant.

En tous cas, on peut citer des exemples où ce sont les points les plus élevés qui ont été préservés; ainsi le haut de Meyrargues.

De même à Lambesc, le haut du pays bâti sur le calcaire est relativement moins atteint et les granges qui se trouvent sur le plateau entre Lambesc et Croignes ont été protégées ; c'est qu'elles se trouvent sur une petite bande de calcaires qui s'est opposée au passage des ondes sismiques; il en est de même du moulin de Saint-Marc, qui n'a pas trop souffert non plus.

D'une façon générale, ce sont les pays situés en terrain relativement peu solide qui ont été les plus endommagés et cela est d'ailleurs un fait bien connu en sismologie.

A Salon, les immeubles du bas de la ville sont fondés sur des éboulis extrêmement meubles, dans lesquels les fondations sont certainement insuffisantes.

INFLUENCE DU MODE DE CONSTRUCTION DES MAISONS

Le mode de construction des maisons a joué évidemment un grand rôle. La plupart d'entre elles étaient bâties d'une façon déplorable, et il est bien certain que les dégâts auraient été beaucoup moins

considérables si les maisons avaient été construites, non pas même suivant les principes applicables en pays sismique, mais seulement suivant les lois ordinaires de l'art architectural.

Cependant il faut noter que constamment on observe l'indépendance du mode de construction et des dégâts. Des immeubles, dans un état de vétusté et de ruine extraordinaire ont à peine souffert; ainsi les vieilles maisons, au-dessous du château de Meyrargues, certaines vieilles maisons de Rognes, de Lambesc, de Saint-Cannat, etc.

A Vernègues, une vieille maison inhabitée depuis vingt ans, tant elle était vieille, n'a pas été touchée.

On pourrait multiplier les exemples d'immeubles en mauvais état, qui ont été ainsi conservés, on pourrait presque dire, d'une façon miraculeuse.

Ailleurs, au contraire, de beaux immeubles d'apparence solide ont été complètement crevassés.

Il semble que, toutes autres choses égales d'ailleurs, les maisons bâties en petits matériaux (moellons, brique) aient mieux résisté que celles bâties en matériaux de grande taille. C'est là d'ailleurs un fait bien connu(1), mais qu'il était intéressant de retrouver ici.

Il en résulte que si la vétusté des maisons a été un facteur important et a augmenté leurs chances de démolition, il n'est pas le seul. Il faut donc chercher d'autres causes que la vétusté au fait que certaines zones ont été complètement dévastées et que d'autres sont relativement épargnées.

MINIMES DÉGATS AUX CHEMINÉES ET AUX PUITS

Les quelques grandes cheminées qui existaient dans la région ont peu souffert. C'est là un fait bien connu que la résistance des tours circulaires aux tremblements de terre; car ce mode de construction est parfaitement fait pour résister aux mouvements horizontaux (vent ou tremblement de terre).

Il faut noter également que les puits ont peu souffert. Dans la propriété de Tabour, un puits ancien profond de 40 mètres n'aurait pas eu une pierre descellée, tandis qu'il y a des dégâts importants au voisinage.

1. Voir en particulier Fouqué, *Rapport sur les tremblements de terre de Céphalonie* (*Arch. miss. sc. et litt.*, 3e série, IV, 1868, p. 445).

DÉGATS AUX ÉGLISES

On remarquera que la plupart des églises de la région dévastée ont été très gravement touchées. Cela tient à ce que l'écartement des murs a causé la destruction des voûtes. Là encore on a une preuve de la grande importance du mouvement horizontal dans la destruction des habitations.

Les clochers ont également beaucoup souffert, à cause du non-synchronisme des vibrations du clocher et du corps de l'église, où deux portions du bâtiment n'étant généralement pas de la même époque n'étaient pas construites de la même manière, etc.

Ces faits expliquent pourquoi, dans des pays relativement peu éprouvés, comme Mouriès, Vauvenargues, les églises ont été les édifices les plus endommagés.

Ils rendent d'autant plus remarquable le fait que l'église de Rognes a peu souffert, à côté des maisons dévastées de la pente qui se trouve au-dessus d'elle.

VI

Apparence de disposition zonaire des dégâts dans la région dévastée.

Il m'a paru, en plusieurs points, apercevoir dans la région dévastée une disposition en zones des dégâts. On conçoit ce que de telles constatations ont de délicat ; tout d'abord, elles ne seraient possibles que si tout le pays était couvert de maisons ; en second lieu, même dans ce cas, les variations dans la nature du sous-sol et dans le mode de construction des maisons introduiraient des perturbations telles qu'il serait difficile de mettre ce phénomène en évidence d'une façon nette.

Cependant, dès à présent, il me paraît intéressant de noter quelques faits de cet ordre qui me paraissent dignes d'attirer l'attention, sinon d'apporter la conviction.

Rognes. — J'ai déjà dit combien les dégâts étaient à Rognes curieusement localisés sur le bord nord de la route. Évidemment, ils ont porté surtout sur de vieilles maisons, faciles à démolir, situées sur la pente d'une colline.

Mais, parmi les maisons du bord sud de la route, il y en avait d'également vieilles, situées également sur la pente de la colline ; la nature du terrain paraît à peu près la même dans l'ensemble.

Pourquoi les unes sont-elles détruites, tandis que les autres sont restées debout?

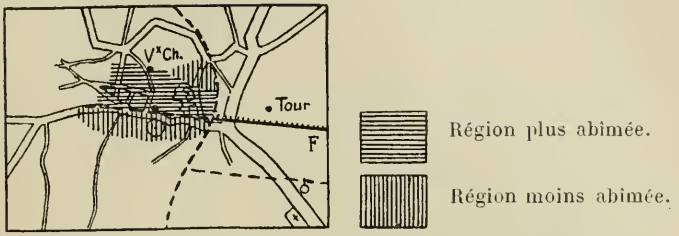


Fig. 2. — Schéma de la répartition des dégâts à Rognes.

Entre Rognes et Lambesc. — Sur la route qui réunit ces deux villages, un peu à l'ouest du Petit-Saint-Paul qui est complètement démoli, entre ce point et Rue, se trouve une série de maisons, s'alignant à peu près parallèlement à la route. Ces maisons ont relativement résisté, tandis que celles situées un peu au nord sont toutes effondrées.

Lambesc. — A Lambesc, on croit pouvoir observer des faits analogues. C'est le centre du pays qui a le plus souffert. Le haut du pays, quoique presqu'au contact des sédiments crétacés et miocènes, a peu souffert. La région tout à fait basse, comme les Biates, a été

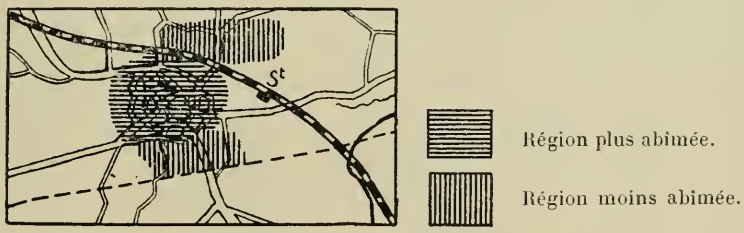


Fig. 3. — Schéma de la répartition des dégâts à Lambesc.
---------- Contact de deux terrains différents.

préservée; on serait donc en présence de trois zones, l'une fortement atteinte, intercalée entre deux zones moins endommagées.

Saint-Cannat. — J'ai déjà dit que la partie sud de Saint-Cannat, et en particulier le faubourg d'Aix étaient relativement moins endommagés que le centre du village ; il semble également qu'il y ait plus au nord, à hauteur de la gare, une zone un peu moins lézardée.

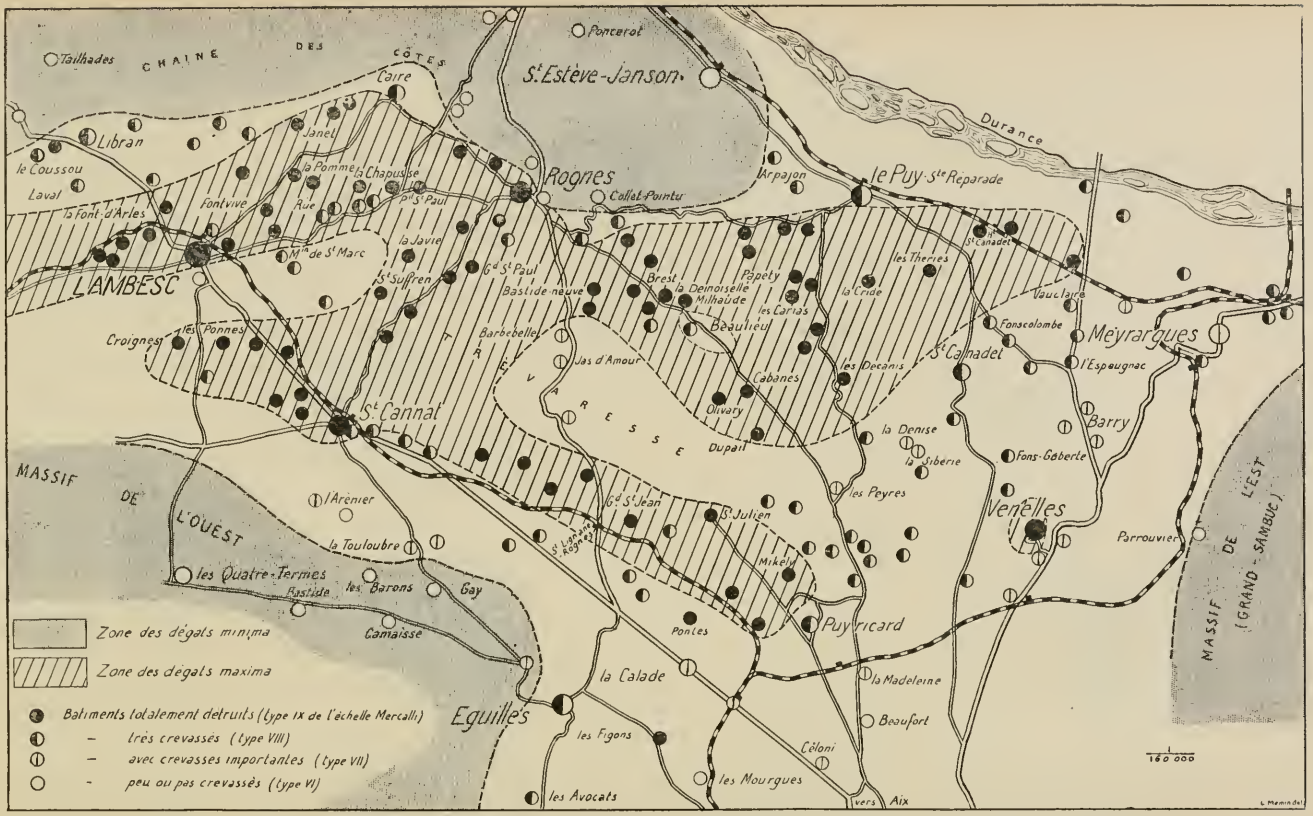


Fig. 4. — Carte représentant l'allure des courbes isoséistes dans le centre de la région dévastée.

L'importance des dégâts en chaque point marqué est peut-être un peu sujette à interprétation. L'allure des couches pourrait en être modifiée dans le détail. Mais, dans l'ensemble, cette allure représente assez bien l'impression que j'ai eue de la répartition des dommages.

Ce sont là des faits que je relate parce qu'ils m'ont frappé, mais auxquels il ne faudrait pas attacher trop d'importance, tant qu'ils ne seront pas vérifiés et corroborés par d'autres.

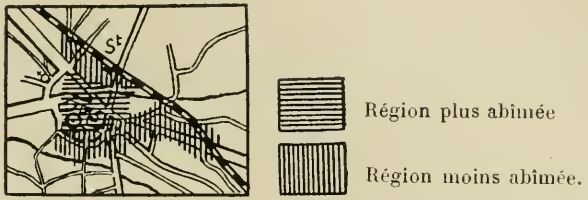


Fig. 5 — Schéma de la répartition des dégâts à Saint-Cannat.

Meyrargues. — Un fait curieux m'a été signalé par M. Sumian, maire de Meyrargues. M. Sumian se promenant sur la route, vers le coude de la grand'route, n'a rien senti ; mais il a vu bouger les maisons de Meyrargues, et il a cru que c'était l'immeuble du cercle, peu solide, qui s'écroulait. Le facteur, situé environ à 400 mètres plus loin vers la gare, a été renversé.

Si ces dires sont exacts, il y aurait donc là encore une zone, peu affectée entre deux zones éprouvées.

Dans tous les cas, la largeur de ces zones, si elles existent, serait voisine de 400 mètres (à 100 mètres près).

Résumé. — Ces faits ne me paraissent pas encore suffisamment nets pour les considérer comme acquis. J'attire seulement l'attention sur eux de façon à ce que les travaux ultérieurs sur ce tremblement de terre permettent de savoir s'ils correspondent ou non à la réalité.

Je ferai seulement remarquer qu'ils seraient assez logiquement explicables dans l'hypothèse où les ondes sismiques, provenant de l'ébranlement de la zone sismogénique Lambesc-Rognes, se seraient réfléchies sur les deux massifs calcaires que j'ai désignés sous le nom de massifs de l'est et de l'ouest.

PLAN PRÉSENTÉ A LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

Par M. Ernest LEBON,

DE SON OPUSCULE INTITULÉ :

Savants du Jour :

HENRI POINCARÉ, Biographie, Bibliographie analytique des Écrits

Un volume grand in-8° (28-18) de VIII-80 pages, papier de Hollande, avec un portrait en héliogravure ; Paris, Gauthier-Villars, 1er juillet 1909.

Cet Opuscule est le premier d'une Collection que je me propose de publier sur les *Savants du Jour*. Il m'a paru convenable de mettre mon entreprise sous l'égide d'un nom dont la réputation est mondiale.

J'ai cru qu'il serait attrayant de reproduire la partie biographique du spirituel Discours prononcé par un profond historien en recevant M. Henri Poincaré à l'Académie Française.

Afin de donner une idée nette des profondes et multiples recherches de ce penseur, j'ai, d'une part, présenté les jugements portés en Science, avec une haute compétence, par deux éminents savants dont le devoir a été d'en résumer, devant un public d'élite, les principales directions et les nombreuses conséquences ; d'autre part, inséré, sur son récent Ouvrage relatif à la Philosophie scientifique, une fine analyse spécialement composée par l'un de ses collègues à la Sorbonne et à l'Académie Française.

En faisant précéder chacune des cinq principales sections de mon travail d'appréciations dues à des hommes illustres, il me semble que j'y ai introduit des éléments qui font oublier la sécheresse inévitable de suites analytiques d'énumérations de titres d'écrits, bien que les titres vagues soient accompagnés de sobres explications.

C'est pourquoi j'ose me flatter d'être parvenu à composer un ouvrage qui soit à la fois intéressant pour les personnes qui désirent connaître, seulement dans son ensemble, l'œuvre de M. Henri Poincaré, très utile à celles qui se livrent à d'ardues recherches dans quelques-unes des larges et nombreuses voies qu'il a ouvertes.

J'espère avoir signalé tous ses Écrits originaux et les principales analyses dont ils ont été le sujet. Ce n'est qu'après les avoir lus ou parcourus que j'ai donné les références et les renseignements

qui s'y rapportent. On rendrait service à la science en me signalant les omissions. Beaucoup de ces Écrits ont été reproduits en diverses langues : j'en ai cité les traductions que j'avais vues ou dont j'étais certain.

Enfin il importe de faire remarquer que M. Henri Poincaré, après avoir lu la partie de mon manuscrit relative à l'Analyse mathématique, a bien voulu me donner de précieux conseils pour le classement analytique des Mémoires et des Notes, et qu'il a aussi lu et approuvé la dernière épreuve d'imprimerie de cet Opuscule.

Paris, le 10 juillet 1909.

Cet Ouvrage a été signalé à l'Académie des Sciences par M. G. Darboux, *secrétaire perpétuel* (Séance du 12 juillet 1909), *et à l'Académie Française par* M. Thureau-Dangin, *secrétaire perpétuel* (Séance du 15 juillet 1909).

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES.

EXTRAITS DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES

Séance du 10 juillet 1909

Présidence de M. André

M. E. Lebon expose le plan d'un opuscule qu'il vient de faire paraître sur l'œuvre de M. Henri Poincaré.

M. Rabaud examine diverses théories relatives aux métamorphoses.

M. Fauré-Frémiet présente diverses observations sur le même sujet.

M. Chapelon fait une communication sur les corps mous.

M. Semichon présente quelques observations sur les formes des cellules construites par les Abeilles.

Séance du 24 juillet 1909

Présidence de M. Lebon

M. Pellegrin résume sa note aux C. R. de l'Académie des sciences du 12 juillet, sur la faune ichtyologique du lac Victoria-Nyanza.

M. Bioche fait une communication sur un carré magique qui se trouve dans *Mélancholia* d'Albert Dürer.

Séance du 23 octobre 1909

Présidence de M. André

La Société a reçu divers mémoires de M. Haton de la Goupillière et un ouvrage de M. Malher intitulé : *La Chartreuse de Vauvert et l'Hôtel Vendôme.*

M. Lebon offre à la Société le résumé des travaux de la section de mathématiques présidée par lui au Congrès de l'A. F. A. S. (Lille 1909).

M. Rabaud dépose au nom de M. Anthony un mémoire intitulé : *Recherches anatomiques sur les Bradypes arboricoles.*

M. Legendre fait une communication sur les variations de température, de densité et de teneur en oxygène de l'eau de mer littorale.

M. Fauré-Frémiet entretient la Société des colorants vitaux, de leur virage, et des indications qu'ils sont susceptibles de fournir à la chimie cellulaire.

Séance du 13 *novembre* 1909

PRÉSIDENCE DE M. PERRIN, PRÉSIDENT

M. Coutière signale le cas très accentué de dimorphisme des ♂ chez les espèces de Crevettes *Hippolyte marmoratus* et *gibberosus* H. M. Edwards, de même qu'au sein de l'espèce *H. neglectus* de Man.

Il examine quelques hypothèses relatives à ces faits de dimorphisme.

M. Rabaud fait part de ses remarques sur l'éclosion d'un *Monodontomerus*, Hyménoptère parasite des cocons de *Zygæna occitanica*.

Séance du 27 *septembre* 1909

PRÉSIDENCE DE M. PERRIN, PRÉSIDENT

M. Coutière présente à la Société, au nom de M. le Dr Jousseaume, un ouvrage intitulé : *Réflexions sur les volcans et les tremblements de terre.*

M. Lemoine indique les récents progrès accomplis dans la connaissance des causes des tremblements de terre.

M. Rabaud expose ses observations personnelles sur les habitudes du papillon *Zygæna occitanica* dans un habitat déterminé, et montre la complexité de la notion du milieu au point de vue de son influence sur les organismes.

M. Fauré-Frémiet fait une communication sur quelques Protozoaires des eaux douces.

Séance du 11 *décembre* 1909

PRÉSIDENCE DE M. PERRIN, PRÉSIDENT

M. Pellegrin fait une communication sur les Poissons du genre *Vandellia* C. V.

M. Deschamps établit quelques identités fondamentales relatives aux formes quadratiques, dans le cadre desquelles il a constaté que l'on peut faire entrer toutes les formules exprimant les propriétés des coniques et des quadriques.

Séance du 18 *décembre* 1909

PRÉSIDENCE DE M. MATIGNON, VICE-PRÉSIDENT

M. Legendre fait une communication sur le mécanisme physiologique du sommeil. Il montre l'insuffisance des hypothèses proposées et il expose les premiers résultats de recherches personnelles encore inachevées.

NOTES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

DÉMONSTRATION DE QUELQUES IDENTITÉS FONDAMENTALES ET PREMIÈRES APPLICATIONS

Par M. le Dr Joseph DESCHAMPS.

Une des principales difficultés de la Géométrie analytique réside dans la multiplicité de ses formules, dans les différences de forme qu'elles affectent, suivant qu'on rapporte les figures à tel ou tel système de coordonnées, et aussi dans l'absence apparente de liaison entre les formules relatives à des questions différentes, mieux encore à une même question. Il en résulte non seulement que la mémoire doit jouer un grand rôle dans tout le cours de cette étude, mais encore que le rôle de celle-ci est lui-même rendu malaisé et par suite éminemment ingrat.

Est-il possible d'obvier à ces inconvénients qui, indépendamment des difficultés propres de la Géométrie analytique, ont rebuté tant d'esprits ? Nous n'en doutons nullement ; car, si une observation même superficielle a depuis longtemps permis d'établir une parenté entre des formules apparemment dissemblables et montré qu'il y a toujours avantage à commencer par les cas les plus généraux et les formules les plus générales, une observation plus attentive montre que, dans le cas des questions du second degré qui occupent une si grande place dans l'enseignement, la presque totalité des formules employées se réduit à un certain nombre de formules types, qu'il est facile d'apprendre et de retenir.

Le présent travail a précisément pour objet non seulement d'établir ces formules types dont la plupart sont déjà connues et employées au moins à titre de cas particuliers dans un certain nombre d'ouvrages, mais encore d'établir un certain nombre d'identités fondamentales permettant de passer de ces formes à d'autres moins connues et inversement. Nous établissons ainsi une synthèse de formes dont l'étude préalable, si ardue qu'elle paraisse, est destinée à faciliter dans une large mesure l'étude ultérieure de la Géométrie analytique.

Pour justifier notre méthode, nous faisons l'application des résultats obtenus à quelques cas les plus simples, nous réservant de faire, dans d'autres mémoires, des applications plus nombreuses et plus étendues.

DÉTERMINANTS SYMÉTRIQUES FONCTIONNELS

Nous ne nous occupons ici que des formes quadratiques. Bien que la théorie qui va être développée s'applique à des formes contenant un nombre quelconque de variables, nous ne mentionnerons explicitement que celles contenant deux, trois ou quatre variables, qui seules interviennent dans la Géométrie analytique à une, deux ou trois dimensions. Toutefois, les résultats que nous allons faire connaître sont susceptibles d'être aisément généralisés.

I. — FORME QUADRATIQUE A DEUX VARIABLES.

1° *Définitions et notations.*

Considérons la forme

$$S(x\ y) = S = ax^2 + by^2 + 2hxy,$$

à laquelle se rattache son discrimant.

$$C = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = ab - h^2.$$

Conformément à la notation usuelle, nous désignerons par A, B, H, les déterminants mineurs des éléments de ce discriminant, à l'aide desquels on forme le déterminant réciproque du déterminant précédent.

$$C_r = \begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix}.$$

Dans le cas présent, qui est le plus simple de tous, on a :

$$A = b, \qquad B = a, \qquad H = -h,$$

ce qui permet d'écrire C_r sous la forme

$$C_r = \begin{vmatrix} b & -h \\ -h & a \end{vmatrix} = ab - h^2.$$

Il en résulte ici :

$$C_r = C,$$

résultat qui découle d'ailleurs de la théorie générale des déterminants réciproques.

La fonction S a deux dérivées partielles, du premier degré en x et y, dont les valeurs sont :

$$\frac{1}{2} S'_x \equiv ax + hy,$$

$$\frac{1}{2} S'_y \equiv hx + by.$$

Le discriminant C n'est autre que le déterminant symétrique des coefficients de ces deux fonctions du premier degré.

Le théorème des fonctions homogènes établit entre les fonctions et ses dérivées partielles la relation identique :

$$S \equiv \frac{1}{2}(xS'_x + yS'_y).$$

Forme polaire. — Distinguons par les indices 1 et 2 deux groupes de variables, auxquels correspondent les deux formes particulières;

(1) $$ax_1^2 + by_1^2 + 2hx_1y_1,$$

(2) $$ax_2^2 + by_2^2 + 2hx_2y_2;$$

nous appellerons *forme* ou *fonction polaire* la fonction suivante :

(3) $$ax_1x_2 + by_1y_2 + h(x_1y_2 + y_1x_2),$$

dont le mode de dérivation de l'une des formes (1) et (2) se conçoit immédiatement. On reconnaît non moins facilement que cette forme polaire est symétrique en (x_1y_1) et (x_2y_2) et peut s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes :

(4) $$\frac{1}{2}(x_1S'_{x_1} + y_1S'_{y_2}),$$

(5) $$\frac{1}{2}(x_2S'_{x_1} + y_2S'_{y_1}).$$

Pour abréger, nous désignerons la forme polaire (3) par l'un ou l'autre des symboles S_{12}, S_{21}, en posant plus spécialement :

$$(4') \qquad S_{12} \equiv \frac{1}{2}(x_1 S'_{x2} + y_1 S'_{y2}),$$

$$(5') \qquad S_{21} \equiv \frac{1}{2}(x_2 S'_{x1} + y_2 S'_{y1}),$$

la symétrie signalée plus haut entraînant l'identité :

$$S_{21} \equiv S_{12}.$$

Si maintenant on remarque qu'en remplaçant dans le second membre de l'égalité (4) les variables x_2 et y_2 par les variables x_1 et y_1, on retombe sur la forme (1), comme aussi en remplaçant dans le second membre de l'identité (5') les variables x_1 et y_1, par les variables x_2 et y_2, on retombe sur la forme (2), cela nous permet d'écrire, en faisant les mêmes substitutions d'indices dans les premiers membres des mêmes identités :

$$(1') \qquad S_{11} \equiv \frac{1}{2}(x_1 S'_{x1} + y_1 S'_{y1}) \equiv ax_1^2 + by_1^2 + 2hx_1y_1,$$

$$(2') \qquad S_{22} \equiv \frac{1}{2}(x_2 S'_{x2} + y_2 S'_{y2}) \equiv ax_2^2 + by_2^2 + 2hx_2y_2.$$

2° *Déterminant fonctionnel.*

Nous donnerons ce nom au déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix},$$

formé avec les fonctions précédemment définies. A cause de l'identité $S_{21} \equiv S_{12}$, ce déterminant est un déterminant symétrique.

A ce déterminant se rattachent ses mineurs ou éléments principaux S_{11}, S_{22}, et ses mineurs ou éléments symétriques S_{12}, S_{21}.

Nous nous proposons de trouver d'autres formes de ce déterminant fonctionnel et de ses déterminants mineurs.

1° *Déterminants mineurs principaux :* S_{11} *et* S_{22}. — Dans le cas présent, ces déterminants mineurs sont les éléments principaux du

déterminant fonctionnel considéré. En se reportant à la formule (1'), on a :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{2}(x_1 S'_{x_1} + y_1 S'_{y_1}) \\ &= x_1(ax_1 + hy_1) + y_1(hx_1 + by_1). \end{aligned}$$

Or, on voit immédiatement que le second membre est le développement du déterminant :

$$-\begin{vmatrix} b-h & x_1 \\ -h & a & y_1 \\ x_1 & y_1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A & H & x_1 \\ H & B & y_1 \\ x_1 & y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

On a donc :

$$S_{11} = -\begin{vmatrix} A & H & x_1 \\ H & B & y_1 \\ x_1 & y_1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

De même

$$S_{22} = -\begin{vmatrix} A & H & x_2 \\ H & B & y_2 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{6'}$$

2° *Déterminants mineurs non principaux :* S_{12} *et* S_{21}. — Ces déterminants qui sont les éléments non principaux du déterminant symétrique fonctionnel représentent aussi la forme polaire, symétrique en $(x_1\ y_1)$ et $(x_2\ y_2)$, de la forme quadratique S. — En se reportant aux identités (4') et (5'), et remplaçant les dérivées par leurs valeurs, on obtient les identités :

$$S_{12} = S_{21} = -\begin{vmatrix} A & H & x_1 \\ H & B & y_1 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A & H & x_2 \\ H & B & y_2 \\ x_1 & y_1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

3° *Déterminant fonctionnel :*

$$\begin{vmatrix} S_{12} & S_{12} \\ S_{11} & S_{22} \end{vmatrix}.$$

En faisant usage des identités (1′) et (4′), on a successivement :

$$\left|\begin{matrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{matrix}\right| \equiv \left|\begin{matrix} \frac{1}{2}(x_1 S'_{x1} + y_1 S'_{y1}) & \frac{1}{2}(x_1 S_{x'2} + y_1 S'_{y2}) \\ \frac{1}{2}(x_2 S'_{x1} + y_2 S'_{y1}) & \frac{1}{2}(x_2 S'_{x2} + y_2 S'_{y2}) \end{matrix}\right|$$

$$\equiv \left|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} \frac{1}{2}(S'x_1 \; \frac{1}{2} S'y_1) \\ \frac{1}{2}(S'x_2 \; \frac{1}{2} S'y_2) \end{matrix}\right|$$

$$\equiv \left|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} ax_1 + hy_1, & hx_2 + by_2 \\ ax_2 + hy_2, & hy_2 + by_2 \end{matrix}\right|$$

$$\equiv \left|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} a & h \\ h & b \end{matrix}\right|.$$

et finalement :

$$(8) \qquad \left|\begin{matrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{matrix}\right| \equiv \left|\begin{matrix} a & h \\ h & b \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right|^2.$$

Or, considérons le déterminant :

$$\left|\begin{matrix} A & H & x_1 & x_2 \\ H & B & y_1 & y_2 \\ x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0. \end{matrix}\right|.$$

En le développant d'après la règle de développement en produits de déterminants, on trouve :

$$\left|\begin{matrix} A & H & x_1 & x_2 \\ H & B & y_1 & y_2 \\ x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \equiv \left|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right|^2.$$

La comparaison de cette identité avec celle qui vient d'être trouvée pour exprimer la valeur du déterminant fonctionnel nous donne :

$$(9) \qquad \left|\begin{matrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{matrix}\right| \equiv \left|\begin{matrix} a & h \\ h & b \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} A & H & x_1 & x_2 \\ H & B & y_1 & y_2 \\ x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \equiv C \left|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right|^2.$$

Il apparaît ainsi, d'après les identités (6), (6′), (7), (8) et (9), *que le déterminant du second ordre*,

$$C_r = \left|\begin{matrix} A & H \\ H & B \end{matrix}\right|$$

réciproque du discriminant

$$C = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$$

peut être encadré de une ou deux lignes et colonnes, identiques ou non, ayant pour éléments les variables (x_1y_1), (x_2x_2), *complétées par des zéros en nombre voulu, de manière à former de nouveaux déterminants qui seront du troisième ou du quatrième ordre.* Ces derniers déterminants représentent respectivement le déterminant fonctionnel considéré et ses divers mineurs.

3° *Expression en déterminants des fonctions* $S(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

1° Considérons d'abord la fonction :

$$S(x_1 - x_2, \quad y_1 - y_2),$$

obtenue en remplaçant, dans $S(x\ y)$, x et y respectivement par $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$. En faisant usage de l'identité (6), on peut écrire :

$$(10) \qquad S(x_1 - x_2, \quad y_1 - y_2) \equiv - \begin{vmatrix} A & H & x_1 - x_2 \\ H & B & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Or, en remarquant que les différences $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$ sont les développements des déterminants :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

on constate sans difficulté que cette dernière identité peut être mise sous la forme :

$$(11) \qquad S(x_1 - x_2, \quad y_1 - y_2) \equiv \begin{vmatrix} A & H & 0 & x_1 & x_2 \\ H & B & 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut de la même manière remplacer dans la forme polaire S_{23} les coordonnées (x_2y_2), (x_3y_3) respectivement par les différences

$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$, $(x_1 - x_3, y_1 - y_3)$. On verrait encore que le résultat est exprimable par le déterminant :

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} A & H & 0 & x_1 & x_2 \\ H & B & 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2° Ces résultats obtenus, on obtient immédiatement ceux relatifs à la fonction $S(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Il suffit en effet de remplacer dans les formules (10) et (11) x_2 et y_2 par $-x_2$ et $-y_2$, ce qui donne finalement :

$$(13) \qquad S(x_1 + x_2, \quad y_1 + y_2) \equiv \begin{vmatrix} A & H & 0 & x_1 & -x_2 \\ H & B & 0 & y_1 & -y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 \\ -x_2 & -y_2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

4° Notations symboliques.

Il est nécessaire, pour abréger les écritures, d'introduire des notations symboliques, choisies de façon à faire image. En remarquant que les déterminants des formules (6), (6'), (7), (9), (11) ont tous pour *noyau* le déterminant réciproque :

$$C_r \equiv \begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix},$$

nous écrirons ces formules sous les formes suivantes :

$$(VI) \qquad S_{11} \equiv -\left|\frac{C_r}{1}\middle|\,1\right|$$

$$(VI)' \qquad S_{22} \equiv -\left|\frac{C_r}{2}\middle|\,2\right|$$

$$(VII) \qquad S_{12} \equiv -\left|\frac{C_r}{2}\middle|\,1\right|$$

$$(IX) \qquad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} \equiv \left|\frac{C_r}{12}\middle|\,12\right|$$

$$(XI) \qquad S(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \equiv S_{11} + S_{22} - 2S_{12} \equiv \left|\frac{C_r}{012}\middle|\,012\right|$$

qui ne nécessitent aucune explication.

II. — FORME QUADRATIQUE A TROIS VARIABLES

1° *Définitions et notations.*

Considérons la forme quadratique :

$$S(x\ y\ z) \equiv S \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy,$$

dont les demi-dérivées partielles sont :

$$\frac{1}{2}S'_x \equiv ax + hy + gz,$$
$$\frac{1}{2}S'_y \equiv hx + by + fz,$$
$$\frac{1}{2}S'_z \equiv gx + fy + cz,$$

Le théorème des fonctions homogènes permet d'écrire l'identité :

$$S(x\ y\ z) \equiv \frac{1}{2}(xS'_x + yS'_y + zS'_z).$$

A la fonction S se rattache son déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \equiv abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2,$$

qui est le déterminant des coefficients des demi-dérivées partielles. Conformément à la notation usuelle, nous désignerons par A, B, C, F, G, H les déterminants mineurs de première classe ou de second ordre dont les valeurs sont :

$$A = bc - f^2, \quad B = ca - g^2, \quad C = ab - h^2,$$
$$F = gh - af, \quad G = hf - bg, \quad H = fg - ch,$$

et nous formerons avec ces mineurs pris comme éléments le déterminant réciproque D_r du discriminant D :

$$D_r = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}.$$

On sait par la théorie des déterminants réciproques :
1° Qu'il y a entre D_r et D :

$$D_r = D^2;$$

2° Que si l'on considère les mineurs de second ordre de D_r, ceux-ci sont liés aux éléments de D par les relations :

$$\begin{array}{lll} BC - F^2 = aD, & CA - G^2 = bD, & AB - H^2 = aD, \\ GH - AF = fD, & HF - BG = gD, & FG - CH = hD. \end{array}$$

Formes polaires. — Distinguons par les indices 1, 2 et 3, trois groupes de variables auxquels correspondent les formes particulières de la fonction S :

$$(14) \qquad ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + 2fy_1z_1 + 2gz_1x_1 + 2hx_1y_1,$$
$$(15) \qquad ax_2^2 + by_2^2 + cz_2^2 + 2fy_2z_2 + 2gz_2x_2 + 2hx_2y_2,$$
$$(16) \qquad ax_3^2 + by_3^2 + cz_3^2 + 2fy_3z_3 + 2gz_3x_3 + 2hx_3y_3.$$

Nous appellerons alors *forme* ou *fonction polaire* la fonction suivante formée avec deux des trois groupes précédents de variables :

$$(17) \qquad ax_1x_2 + by_1y_2 + cz_1z_2 + f(y_1z_2 + z_1y_2) + g(z_1x_2 + x_1z_2) + h(x_1y_2 + y_1x_2),$$

dont le mode de dérivation de l'une des formes (14) ou (15) apparaît immédiatement. Cette forme polaire est, comme on le voit, symétrique en $(x_1y_1z_1)$ et $(x_2y_2z_2)$ et peut s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$(18) \qquad \frac{1}{2}(x_1S'_{x2} + y_1S'_{y2} + z_1S'_{z2}),$$

$$(19) \qquad \frac{1}{2}(x_2S'_{x1} + y_2S'_{y1} + z_2S'_{z1}).$$

Pour abréger, nous désignerons la forme polaire (17) par l'un ou l'autre des symboles S_{12}, S_{21}, en posant plus spécialement :

$$(18') \qquad S_{12} = \frac{1}{2}(x_1S'_{x2} + y_1S'_{y2} + z_1S'_{z2}),$$

$$(19) \qquad S_{21} = \frac{1}{2}(x_2S'_{x1} + y_2S'_{y1} + z_2S'_{z1}),$$

la symétrie indiquée plus haut entraînant l'identité :

$$S_{21} = S_{12}.$$

En procédant de même avec les groupes 1 et 3, 2 et 3 des variables, on a les autres formes polaires.

$$S_{13} = S_{31}$$
$$S_{23} = S_{32}.$$

Si maintenant on remarque que, en remplaçant dans le second membre de l'égalité (18), les variables x_2, y_2, z_2 par les variables x_1, y_1, z_1, on retombe sur la forme (14), cela nous permet d'écrire, en faisant dans le premier membre de la même égalité la même substitution d'indice :

$$(14') \quad S_{11} = \frac{1}{2}(x_1 S'_{x1} + y_1 S'_{x1} + z_1 S'_{z1})$$
$$= ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + 2fy_1z_1 + 2gz_1x_1 + 2h_1x_1y_1$$

et par suite aussi :

$$(15') \quad S_{22} = \frac{1}{2}(x_2 S'_{x2} + y_2 S'_{y2} + z_2 S'_{z2})$$
$$= ax_2^2 + by_2^2 + cz_2^2 + 2fy_2z_2 + 2gz_2x_2 + 2hx_2y_2$$
$$(16') \quad S_{33} = \frac{1}{2}(x_3 S'_{x3} + y_3 S'_{y3} + z_3 S'_{z3})$$
$$= ax_3^2 + by_3^2 + cz_3^2 + 2fy_3z_3 + 2gz_3x_3 + 2hx_3y_3$$

2° *Déterminant fonctionnel et ses divers déterminants mineurs.*

Nous appellerons *déterminant fonctionnel* correspondant à la forme quadratique à trois variables le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix},$$

formé avec les fonctions précédemment définies. A cause de l'identité démontrée des éléments symétriquement placés par rapport à la diagonale principale, ce déterminant fonctionnel est un déterminant symétrique.

A ce déterminant se rattachent les divers déterminants mineurs de

première et de seconde classe. Les premiers sont des déterminants du second ordre, qui se partagent en deux catégories : les uns symétriques, tels que

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix},$$

au nombre de trois ; les autres, non symétriques, tels que

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix},$$

au nombre de trois également.

Les seconds ne sont autres que les éléments eux-mêmes du déterminant fonctionnel, et se partagent encore en deux groupes : les éléments principaux, S_{11}, S_{22}, S_{23} ; et les éléments non principaux, S_{23}, S_{31}, S_{12}.

Nous nous proposons de trouver d'autres formes du déterminant fonctionnel et de ses divers déterminants mineurs.

1° *Eléments principaux* S_{11}, S_{22}, S_{33}. — Considérons d'abord l'élément S_{11} ; son développement est fourni par la formule (14) :

$$S_{11} = \frac{1}{2}(x_1 S'x_1 + y_1 S'y_1 + z S'z_1)$$
$$= x_1(ax_1 + hy_1 + gz_1) + y_1(hx_1 + by_1 + gz_1) + z_1(gx_1 + fy_1 + cz_1).$$

Ce dernier développement peut s'écrire :

$$S_{11} = \frac{1}{D} x_1(aDx_1 + hDy_1 + gDz_1) + \frac{1}{D} y_1(hDx_1 + bDy_1 + gDz_1)$$
$$+ \frac{1}{D} z_1(gDx_1 + fDy_1 + xDz_1).$$

$$= \frac{1}{D} x_1[(BC - F^2)x_1 + (FG - CH)y_1 + (HF - BG)z_1]$$
$$+ \frac{1}{D} y_1[(FG - CH)x_1 + (CA - G^2)y_1 + (GH - AF)z_1]$$
$$+ \frac{1}{D} z_1[(HF - BG)x_1 + (GH - AF)y_1 + (AB - H^2)z_1].$$

Or, abstraction faite du facteur commun $\frac{1}{D}$, on reconnaît aisément que le second membre est le développement du déterminant :

$$-\begin{vmatrix} A & H & G & x_1 \\ H & B & F & y_1 \\ G & F & C & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On a donc l'identité :

$$(20)\qquad S_{11} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A & H & G & x_1 \\ H & B & F & y_1 \\ G & F & C & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On a par suite de même :

$$(21)\qquad S_{22} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A & H & G & x_2 \\ H & B & F & y_2 \\ G & F & C & z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(22)\qquad S_{33} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A & H & G & x_3 \\ H & B & F & y_3 \\ G & F & C & z_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

2° *Éléments non principaux*, S_{12}, S_{13}, S_{23}. — Considérons d'abord l'élément S_{12}, qui est la forme polaire symétrique en $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, de la fonction S.

En se reportant à l'égalité (18'), qui fournit son développement, et en procédant de la même manière que dans le cas précédent, on obtient les identités :

$$(23)\qquad S_{12} = S_{21} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A & H & G & x_1 \\ H & B & F & y_1 \\ G & F & C & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A & H & G & x_2 \\ H & B & F & y_2 \\ G & F & C & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 \end{vmatrix}$$

et par suite les suivantes :

$$(24)\qquad S_{13} = S_{31} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A & H & G & x_1 \\ H & B & F & y_1 \\ G & F & C & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A & H & G & x_3 \\ H & B & F & y_3 \\ G & F & C & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(25)\qquad S_{23} = S_{32} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A & H & G & x_2 \\ H & B & F & y_2 \\ G & F & C & z_2 \\ y_3 & y_3 & z_3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} A & H & G & x_3 \\ H & B & F & y_3 \\ G & F & C & z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

3° *Déterminants mineurs symétriques du déterminant fonctionnel.* — Considérons d'abord le déterminant

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix}.$$

En y remplaçant les éléments par leurs développements, et se

rappelant les règles de multiplication des tableaux rectangulaires, on a successivement :

$$\left|\begin{matrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \frac{1}{2}(x_1S'_{x1} + y_1S'_{y1} + z_1S'_{z1}) & \frac{1}{2}(x_1S'_{x2} + y_1S'_{y2} + z_1S'_{z2}) \\ \frac{1}{2}(x_2S'_{x1} + y_2S'_{y1} + z_2S'_{z1}) & \frac{1}{2}(x_2S'_{x2} + y_2S'_{y2} + z_2S'_{z2}) \end{matrix}\right|$$

$$= \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2}S'_{x1} & \frac{1}{2}S'_{y1} & \frac{1}{2}S'_{z1} \\ \frac{1}{2}S'_{x2} & \frac{1}{2}S'_{y2} & \frac{1}{2}S'_{z2} \end{matrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} ax_1 + hy_1 + gz_1, & hx_1 + by_1 + fz_1, & gx_1 + fy_1 + cz_1 \\ ax_2 + hy_2 + gz_2, & hx_2 + by_2 + fz_2, & gx_2 + fy_2 + cz_2 \end{matrix} \right\|$$

$$\begin{aligned} (26)\quad \left|\begin{matrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{matrix}\right| &= (y_1z_2 - z_1y_2)\,[A(y_1z_2 - z_1y_2) + H(z_1x_2 - x_1z_2) + G(x_1y_2 - y_1x_2)] \\ &+ (z_1x_2 - x_1z_2)\,[H(y_1z_2 - z_1y_2) + B(z_1x_2 - x_1z_2) + F(x_1y_2 - y_1x_2)] \\ &+ (x_1y_2 - y_1x_2)\,[G(y_1z_2 - z_1y_2) + F(z_1x_2 - x_1z_2) + C(x_1y_2 - y_1x_2)]. \end{aligned}$$

Or, on peut reconnaître dans le second membre de cette dernière égalité le développement sous forme de produits de déterminants du déterminant suivant :

$$\left|\begin{matrix} A & H & G & x_1 & x_2 \\ H & B & F & y_1 & y_2 \\ G & F & C & z_1 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 \end{matrix}\right|.$$

On est donc conduit à l'identité :

$$(27)\qquad \left|\begin{matrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} A & H & G & x_1 & x_2 \\ H & B & F & y_1 & y_2 \\ G & F & C & z_1 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 \end{matrix}\right|.$$

On a de la même manière les deux autres identités :

$$(28)\qquad \left|\begin{matrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{31} & S_{33} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} A & H & G & x_1 & x_3 \\ H & B & F & y_1 & y_3 \\ G & F & C & z_1 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 \end{matrix}\right|$$

$$(29)\qquad \left|\begin{matrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} A & H & G & x_2 & x_3 \\ H & B & F & y_2 & y_3 \\ G & F & C & z_2 & z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 \end{matrix}\right|.$$

Au lieu de transformer en déterminant le second membre de l'identité (26), on aurait pu effectuer les multiplications indiquées ; on aurait ainsi obtenu l'identité *développée :*

$$(26') \quad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} \equiv \begin{array}{l} A\,(y_1z_2 - z_1y_2)^2 + B\,(z_1x_2 - x_1z_2)^2 + C\,(x_1y_2 - y_1x_2)^2 \\ \quad + 2\,F\,(z_1x_2 - x_1z_2)\,(x_1y_2 - y_1x_2) \\ \quad + 2\,G\,(x_1y_2 - y_1x_2)\,(y_1z_2 - z_1y_2) \\ \quad + 2\,H\,(y_1z_2 - z_1y_2)\,(z_1x_2 - x_1z_2). \end{array}$$

Cas particulier. — Supposons que la fonction S soit de la forme simple :

$$S = x^2 + y^2 + z^2;$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix}$$

devient :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{vmatrix}$$
$$= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\,(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2$$

L'application de la formule (26′) donne alors l'identité :

$$(30) \quad \begin{array}{l} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\,(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \\ \quad \equiv (y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (z_1x_2 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2, \end{array}$$

connue sous le nom d'*identité de Lagrange* et d'un usage constant en *Mécanique.*

4° Déterminants mineurs non symétriques du déterminant fonctionnel. — L'un d'eux est :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix}.$$

En y remplaçant les éléments par leurs développements et dirigeant les calculs comme il vient d'être fait pour les déterminants mineurs symétriques, on arrive à l'identité :

$$(31) \quad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & H & G & x_1 & x_2 \\ H & B & F & y_1 & y_2 \\ G & F & C & z_1 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & H & G & x_1 & x_3 \\ H & B & F & y_1 & y_3 \\ G & F & C & z_1 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On a de la même façon les autres identités :

$$(32)\qquad \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{12} & S_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & H & G & x_2 & x_3 \\ H & B & F & y_2 & y_3 \\ G & F & C & z_2 & z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(33)\qquad \begin{vmatrix} S_{33} & S_{31} \\ S_{23} & S_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & H & G & x_3 & x_1 \\ H & B & F & y_3 & y_1 \\ G & F & G & z_3 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

5° *Déterminant fonctionnel* $\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}$. — Remplaçons les éléments de ce déterminant par leurs valeurs écrites plus haut, il vient successivement :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1S'_{x1} + y_1S'_{y1} + z_1S'_{z1}) & \frac{1}{2}(x_1S'_{x2} + y_1S'_{y2} + z_1S'_{z2}) & \frac{1}{2}(x_1S'_{x3} + y_1S'_{y3} + z_1S'_{z3} \\ \frac{1}{2}(x_2S'_{x1} + y_2S'_{y1} + z_2S'_{z1}) & \frac{1}{2}(x_2S'_{x2} + y_2S'_{y2} + z_2S'_{z2}) & \frac{1}{2}(x_2S'_{x3} + y_2S'_{y3} + z_2S'_{z3} \\ \frac{1}{2}(x_3S'_{x1} + y_3S''_{y1} + z_3S'_{z1}) & \frac{1}{2}(y_3S'_{x2} + y_3S'_{y2} + z_3S'_{z2}) & \frac{1}{2}(x_3S'_{x3} + y_3S'_{y3} + z_3S'_{z3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{1}{2}S'_{x1} & \frac{1}{2}S'_{y1} & \frac{1}{2}S'_{z1} \\ \frac{1}{2}S'_{x2} & \frac{1}{2}S'_{y2} & \frac{1}{2}S'_{z2} \\ \frac{1}{2}S'_{x3} & \frac{1}{2}S'_{y3} & \frac{1}{2}S'_{z3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ax_1 + hy_1 + gz_1 & hx_1 + by_1 + fz_1 & gx_1 + fy_1 + cz_1 \\ ax_2 + hy_2 + gz_2 & hx_2 + by_2 + fz_2 & gx_2 + fy_2 + cz_2 \\ ax_3 + hy_3 + gz_3 & hx_3 + by_3 + fz_3 & gx_3 + fy_3 + cz_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

et finalement :

$$(34)\qquad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2.$$

Or, considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & H & G & x_1 & x_2 & x_3 \\ H & B & F & y_1 & y_2 & y_3 \\ G & F & C & z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

on constate aisément qu'il se réduit à :

$$-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & x_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2.$$

En tenant compte de ce résultat, on voit qu'on peut écrire :

$$(35)\quad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & H & G & x_1 & x_2 & x_3 \\ H & B & F & y_1 & y_2 & y_3 \\ G & F & C & z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = D\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2.$$

Il apparaît ainsi, d'après les identités (20), (21) (22), (23), (24), (25), (27), (28), (29), (31), (32), (33) et (35), *que le déterminant du troisième ordre*

$$D_r = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix},$$

réciproque du discriminant

$$D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

de la forme quadratique à trois variables (x,y,z) *peut être encadré de une, deux ou trois lignes et colonnes, identiques ou non, ayant pour éléments les variables* $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$, *complétées par des zéros en nombre voulu, de manière à former des déterminants nouveaux qui seront du quatrième, cinquième, sixième ordre.* Les déterminants ainsi obtenus représentent respectivement le déterminant fonctionnel correspondant à la fonction considérée et ses déterminants mineurs de divers ordres et de diverses natures.

3° *Expression en déterminants des fonctions* $S(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ *et* $S(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

En procédant comme on l'a fait pour la même question dans le cas d'une forme quadratique à deux variables, on obtient l'égalité :

$$(36)\qquad S(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} A & H & G & 0 & x_1 & x_2 \\ H & B & F & 0 & y_1 & y_2 \\ G & F & C & 0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Il en résulte :

$$S(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} A & H & G & 0 & x_1 & -x_2 \\ H & B & F & 0 & y_1 & -y_2 \\ G & F & C & 0 & z_1 & -z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 \\ -x_2 & -y_2 & -z_2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

4° *Notations symboliques.*

Pour abréger les écritures, nous écrirons les identités trouvées sous les formes suivantes :

$$(XX)\qquad S_{11} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} D_r & 1 \\ \hline 1 & \end{vmatrix}$$

$$(XXI)\qquad S_{22} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} D_r & 2 \\ \hline 2 & \end{vmatrix}$$

$$(XXII)\qquad S_{33} = -\frac{3}{D}\begin{vmatrix} D_r & 3 \\ \hline 3 & \end{vmatrix}$$

$$(XXIII)\qquad S_{12} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} D_r & 1 \\ \hline 2 & \end{vmatrix}$$

$$(XXIV)\qquad S_{13} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} D_r & 1 \\ \hline 3 & \end{vmatrix}$$

$$(XXV)\qquad S_{23} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} D_r & 2 \\ \hline 3 & \end{vmatrix}$$

$$(XXVII)\qquad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_r & 12 \\ \hline 12 & \end{vmatrix}$$

$$(XXVIII)\qquad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_r & 13 \\ \hline 13 & \end{vmatrix}$$

$$(XXIX)\qquad \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_r & 23 \\ \hline 23 & \end{vmatrix}$$

$$\text{(XXXI)} \qquad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix} = \left| \frac{D_r}{13} \middle| \begin{matrix} 12 \\ \end{matrix} \right|$$

$$\text{(XXXII)} \qquad \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{12} & S_{12} \end{vmatrix} = \left| \frac{D_r}{21} \middle| \begin{matrix} 23 \\ \end{matrix} \right|$$

$$\text{(XXXIII)} \qquad \begin{vmatrix} S_{33} & S_{31} \\ S_{23} & S_{21} \end{vmatrix} = \left| \frac{D_r}{32} \middle| \begin{matrix} 31 \\ \end{matrix} \right|$$

$$\text{(XXV)} \qquad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = -D \left| \frac{D_r}{123} \middle| \begin{matrix} 123 \\ \end{matrix} \right|$$

$$\text{(XXXVI)} \qquad S(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) = S_{11} + S_{22} - 2S_{12} = \frac{1}{D} \left| \frac{D_r}{012} \middle| \begin{matrix} 012 \\ \end{matrix} \right|$$

qui s'expliquent d'elles-mêmes.

III. — FORME QUADRATIQUE A QUATRE VARIABLES

Les développements qui viennent d'être donnés sur les formes quadratiques à deux ou trois variables suffisent pour faire comprendre la marche à suivre dans le cas d'un nombre plus grand de variables. Cela va nous permettre d'exposer, sans entrer dans trop de détails, les résultats relatifs à quatre variables.

1° *Définitions et notations.*

Considérons la forme :

$$S(x\ y\ z\ t) = S = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2lxt + 2myt + + 2nzt$$

ayant pour dérivées partielles :

$$\frac{1}{2} S'_x = ax + hy + gz + lt,$$

$$\frac{1}{2} S'_y = hx + by + fz + mt,$$

$$\frac{1}{2} S'_z = gx + fy + cz + nt,$$

$$\frac{1}{2} S'_t = lx + my + nz + dt,$$

d'où, par le théorème des fonctions homogènes, l'identité

$$S(x\ y\ z\ t) = \frac{1}{2}(x S'_x + y S'_y + z S'_z + t S'_t).$$

A la fonction S se rattache son discriminant :

$$E = \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix},$$

dont l'expression développée est :

$$E = abcd + 2afmn + 2bgnl + 2chlm + 2dfgh - 2ghnm - 2hfnl - 2fglm + f^2l^2 + g^2m^2 + h^2f^2 - adf^2 - bdg^2 - cdh^2 - bcf^2 - cam^2 - abn^2.$$

Nous désignerons encore par A, B, C, D, F, G, H, L, M, N, les déterminants mineurs de première classe de ce discriminant, chacun d'eux étant affecté du signe qu'il doit avoir dans le développement. Ces déterminants mineurs sont de troisième ordre, les uns symétriques, savoir ceux qui correspondent aux éléments de la diagonale principale, et les autres non symétriques. Nous n'écrirons pas les valeurs de ces divers déterminants mineurs ; nous ferons simplement remarquer que le déterminant mineur désigné par D n'est autre que le discriminant de la forme à trois variables déjà étudiée. Avec ces mineurs, on forme le déterminant réciproque E_r du discriminant E :

$$E_r = \begin{vmatrix} A & H & G & L \\ H & B & F & M \\ B & F & C & N \\ L & M & N & D \end{vmatrix}.$$

On sait par la théorie des déterminants réciproques :

1° Qu'il y a entre E_r et E la relation :

$$E_r = E^3;$$

2° Que, si l'on considère les mineurs de première classe ou de troisième ordre de E_r, que, pour abréger, nous désignerons par A′, B′, C′, D′, F′ G′, L′, M′, N′, comme par exemple :

$$A' = \begin{vmatrix} B & F & M \\ F & C & N \\ M & N & D \end{vmatrix}.$$

ceux-ci sont liés aux éléments de E par les relations :

$$A' = aE^2, \quad B' = bE^2, \quad \ldots\ldots$$
$$F' = fE^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L' = lE^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

3° Que, si l'on considère les mineurs de seconde classe ou de second ordre de E_r, ceux-ci sont liés aux mineurs de seconde classe de E_a complémentaires des mineurs correspondants de E, par des relations telles que les suivantes :

$$CD - N^2 = \begin{vmatrix} C & N \\ N & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} E = (ab - h^2)\, E$$

$$FG - CH = - \begin{vmatrix} H & F \\ G & C \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} h & l \\ m & d \end{vmatrix} E = (lm - dh)\, E.$$

Formes polaires. — Nous distinguerons par les indices 1, 2, 3, 4, quatre groupes de variables auxquels correspondront autant de formes particulières de la fonction S, que nous représenterons par S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{44}, et nous appellerons *forme polaire* de la fonction S la fonction suivante formée de deux des quatre groupes précédents :

$$ax_1x_2 + by_1y_2 + cz_1z_2 + dt_1t_2 + f(y_1z_2 + z_1y_2) + g(z_1x_2 + x_1z_2) + h(x_1y_2 + y_1x_2) + l(x_1t_2 + t_1x_2) + m(y_1t_2 + t_1y_2) + n(z_1t_2 + t_1z_2).$$

Nous désignerons cette forme par S_{12} et remarquerons qu'on a :

$$S_{12} = \frac{1}{2}(x_1S'_{x2} + y_1S'_{y2} + z_1S'_{z2} + t_1S'_{t2}).$$

$$S_{21} = \frac{1}{2}(x_2S'_{x1} + y_2S'_{y1} + z_2S'_{z1} + t_2S'_{t1}).$$

avec l'identité :

$$S_{21} = S_{12}.$$

On aura de la même manière les autres formes polaires S_{13}, S_{14}, S_{23}, S_{24} et S_{34}.

2° *Déterminant fonctionnel et ses mineurs de divers ordres.*

Le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix}$$

est ici du quatrième ordre. Il y a donc lieu de considérer ses éléments et ses mineurs de second et de troisième ordre, indépendamment du déterminant lui-même.

1° *Eléments principaux du déterminant fonctionnel.* — L'élément S_{11} peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{1}{2}(x_1 S'_{x1} + y_1 S'_{y1} + z_1 S'_{z1} + t_1 S'_{t1}) \\
&= x_1 (a x_1 + h y_1 + g z_1 + l t_1) \\
&+ y_1 (h x_1 + b y_1 + f z_1 + m t_1). \\
&+ z_1 (g x_1 + f y_1 + c z_1 + n t_1) \\
&+ t_1 (l x_1 + m y_1 + n z_1 + d t_1) \\
&= \frac{1}{E^2} x_1 (a E^2 x_1 + h E^2 y_1 + g E^2 z_1 + l E^2 t_1) \\
&+ \frac{1}{E^2} y_1 (h E^2 x_1 + b E^2 y_1 + f E^2 z_1 + m E^2 t_1) \\
&+ \frac{1}{E^2} z_1 (g E^2 x_1 + f E^2 y_1 + c E^2 z_1 + n E^2 t_1) \\
&+ \frac{1}{E^2} t_1 (l E^2 x_1 + m E^2 y_1 + n E^2 z_1 + d E^2 t_1) \\
&= \frac{1}{E^2} x_1 (A' x_1 + H' y_1 + G' z_1 + L' t_1) \\
&+ \frac{1}{E^2} y_1 (H' x_1 + B' y_1 + F' z_1 + M' t_1) \\
&+ \frac{1}{E^2} z_1 (G' x_1 + F' y_1 + C' z_1 + N' t_1) \\
&+ \frac{1}{E^2} t_1 (L' x_1 + M' y_1 + N' z_1 + D' t_1)
\end{aligned}$$

Or, abstraction faite du facteur commun $\frac{1}{E^2}$ on reconnaît que le second membre est le développement du déterminant :

$$-\begin{vmatrix} A & H & G & L & x_1 \\ H & B & F & M & y_1 \\ G & F & C & N & z_1 \\ L & M & N & D & t_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 0 \end{vmatrix}$$

On a donc l'identité :

$$S_{11} = -\frac{1}{E^2}\begin{vmatrix} A & H & G & L & x_1 \\ H & B & F & M & y_1 \\ G & F & C & N & y_1 \\ L & M & N & D & t_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (37)$$

Avec les autres indices on aurait des identités analogues.

2° *Eléments non principaux.* — En procédant de la même manière on trouvera pour l'élément S_{12} :

$$(38) \qquad S_{12} = -\frac{1}{E^2}\begin{vmatrix} A & H & G & L & x_1 \\ H & B & F & M & y_1 \\ G & F & C & N & z_1 \\ L & M & N & D & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 0 \end{vmatrix}$$

Tout groupement des indices deux à deux fournit une identité analogue.

3° *Déterminants mineurs symétriques du second ordre du déterminant fonctionnel.* — Parmi ceux-ci, choisissons le déterminant

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix}.$$

En y remplaçant les éléments par leurs développements respectifs et en tenant compte des règles de multiplication des tableaux rectangulaires, on a successivement :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1 S'_{x1} + y_1 S'_{y1} + z_1 S'_{z1} + t_1 S'_{t1}) & \frac{1}{2}(x_1 S'_{x2} + y_1 S'_{y2} + z_1 S'_{z1} + t_1 S'_{t1} \\ \frac{1}{2}(x_2 S'_{x1} + y_2 S'_{y1} + z_2 S'_{z1} + t_2 S'_{t1}) & \frac{1}{2}(x_2 S'_{x2} + y_2 S'_{y2} + z_2 S'_{z2} + t_2 S'_{t1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} S'_{x1} & \frac{1}{2} S'_{y1} & \frac{1}{2} S'_{z1} & \frac{1}{2} S'_{t1} \\ \frac{1}{2} S'_{x2} & \frac{1}{2} S'_{y2} & \frac{1}{2} S'_{z2} & \frac{1}{2} S'_{t2} \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} x_1 y_1 z_1 t_1 \\ x_2 y_2 z_2 t_2 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} ax_1 + hy_1 + gz_1 + lt_1 & hx_1 + by_1 + fz_1 + mt_1 \dots \\ ax_2 + hy_2 + gz_2 + lt_2 & hx_2 + by_2 + fz_2 + mt_2 \dots \end{Vmatrix}$$

$$= (x_1 y_2 - y_1 x_2)\left[\begin{matrix}[(ab-h^2)(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (af-gh)(x_1 z_2 - x_1 z_2) \dots \\ + (am-lh)(x_1 t_2 - t_1 x_2) + (hf-bg)(y_1 z_2 - z_1 y_2) + \end{matrix}\right.$$

$$- (x_1 z_2 - z_1 x_2)[(af-gh)(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (ca-g^2)(x_1 z_2 - z_1 x_2) \dots]$$

$$+ (x_1 t_2 - t_1 x_2)[(am-hl)(x_1 y_2 - y_1 x_2) + \dots]$$

$$- (y_1 z_2 - z_1 y_2)[\dots]$$

$$+ (y_1 t_2 - t_1 y_2)[\dots]$$

$$- (z_1 t_2 - t_1 z_2)[\dots]$$

d'où en multipliant et divisant par E :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{E}(x_1y_2 - y_1x_2)\,[(ab - h^2)\,E\,(x_1y_2 - y_1x_2) \ldots\ldots\ldots\ldots]$$
$$- \frac{1}{E}(x_1z_2 - z_1x_2)\,[(af - gh)\,E\,(x_1y_2 - y_1x_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots]$$
$$+ \frac{1}{E}(x_1t_2 - t_1x_2)\,[(am - hl)\,E\,(x_1y_2 - y_1x_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \frac{1}{E}(x_1y_2 - y_1x_2 \begin{bmatrix} (CD - N^2)(x_1y_2 - y_1x_2) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (DF - MN)(x_1z_2 - z_1x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$
$$- \frac{1}{E}(x_1z_2 - z_1x_2)\,[(DF - MN)(x_1y_2 - y_1x_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots]$$
$$+ \frac{1}{E}x_1t_2 - t_1x_2)\,[(FN - GM)(x_1y_2 - y_1x_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, abstraction faite du facteur commun $\frac{1}{E}$; on reconnaît dans le second membre le développement sous forme de produits de déterminants du déterminant :

$$\begin{vmatrix} A & H & G & L & x_1 & x_2 \\ H & B & F & M & y_1 & y_2 \\ G & F & C & N & z_1 & z_2 \\ L & M & N & D & t_1 & t_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On a donc finalement l'identité :

$$(39) \qquad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} A & H & G & L & x_1 & x_2 \\ H & B & F & M & y_1 & y_2 \\ G & F & C & N & z_1 & z_2 \\ L & M & N & D & t_1 & t_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Tout autre groupement analogue de deux indices donne une identité analogue.

4° *Déterminants mineurs non symétriques du second ordre du déterminant fonctionnel.* — Ces déterminants sont de deux types différents, suivant qu'on y fait intervenir les quatre indices :

$$\begin{vmatrix} S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \end{vmatrix},$$

ou seulement trois d'entre eux comme dans :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix}.$$

Quelle que soit la forme considérée, on procède comme dans le cas des déterminants symétriques du second ordre ; des transformations de même nature que celles qui viennent d'être faites fournissent les identités :

$$(40) \qquad \begin{vmatrix} S_{21} & S_{12} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} A & H & G & L & x_1 & x_2 \\ H & B & F & M & y_1 & y_2 \\ G & F & C & N & z_1 & z_2 \\ L & M & N & D & t_1 & t_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(41) \qquad \begin{vmatrix} S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \end{vmatrix} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} A & H & G & L & x_1 & x_2 \\ H & B & F & M & y_1 & y_2 \\ G & F & C & N & z_1 & z_2 \\ L & M & N & D & t_1 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & 0 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

5° *Déterminants mineurs symétriques du troisième ordre du déterminant fonctionnel.* — La marche à suivre est la même que précédemment, et sans aucun artifice de multiplication et division, on trouve ici :

$$(42) \qquad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A & H & G & L & x_1 & x_2 & x_3 \\ H & B & F & M & y_1 & y_2 & y_3 \\ G & F & C & N & z_1 & z_2 & z_3 \\ L & M & N & D & t_1 & t_2 & t_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

les autres déterminants symétriques ayant des valeurs analogues.

6° *Déterminants mineurs non symétriques du troisième ordre du déterminant fonctionnel.* — L'un d'eux est :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} \end{vmatrix};$$

sa valeur est :

$$(43) \qquad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A & H & G & L & x_1 & x_2 & x_3 \\ H & B & F & M & y_1 & y_2 & y_3 \\ G & F & C & N & z_1 & z_2 & z_3 \\ L & M & N & D & t_1 & t_2 & t_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

7° *Déterminant fonctionnel.* — En procédant comme il a été fait pour ceux du deuxième et du troisième ordre, on a

$$(44)\qquad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & H & G & L & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ H & B & F & M & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ G & F & C & N & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ L & M & N & D & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= E \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}^2$$

Il apparaît encore *que le déterminant du quatrième ordre*

$$E_r = \begin{vmatrix} A & H & G & L \\ H & B & F & M \\ G & F & C & N \\ L & M & N & D \end{vmatrix}$$

réciproque du discriminant

$$E = \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix}$$

de la forme quadratique à quatre variables $S(x,y,z,t)$ *peut être encadré de une, deux, trois ou quatre lignes ou colonnes identiques ou non, ayant pour éléments les variables* $(x_1y_1z_1t_1)$, $(x_2y_2z_2t_2)$, $(x_3y_3z_3t_3)$, $(x_4y_4z_4t_4)$, *complétées par des zéros en nombre voulu, de manière à former des déterminants d'ordre variant de* 5 à 8, lesquels représentent respectivement le déterminant fonctionnel correspondant à la fonction considérée et les déterminants mineurs de divers ordres et de diverses natures.

On remarquera à ce sujet et pour faciliter les écritures :

1° Que le nombre des lignes et colonnes à ajouter est égal à l'ordre du déterminant dont on veut exprimer la valeur ;

2° Que, dans le déterminant à transformer, les seconds indices qui se conservent en lignes horizontales sont des indices de *colonnes* et qu'ils doivent se reproduire dans le même ordre à partir de la gauche dans les *colonnes* fournies par les variables introduites, tandis que les premiers indices, qui se conservent en colonnes verti-

cales, sont des indices de *lignes* et doivent se reproduire dans le même ordre à partir du haut dans les *lignes* formées par les variables introduites.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} & S_{13} \\ S_{31} & S_{33} & S_{33} \\ S_{21} & S_{23} & S_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & H & G & L & x_1 & x_3 & x_3 \\ H & B & F & M & y_1 & y_3 & y_3 \\ G & F & C & N & z_1 & z_3 & z_3 \\ L & M & N & D & t_1 & t_3 & t_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3° *Expression en déterminants des fonctions* :

$$\begin{aligned} &S\,(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2,\ t_1 - t_2) \\ &S\,(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2,\ t_1 + t_2). \end{aligned}$$

On trouve pour la première fonction :

$$(45)\quad S\,(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2,\ t_1 - t_2) = \frac{1}{E^2} \begin{vmatrix} A & H & G & L & 0 & x_1 & x_2 \\ H & B & F & M & 0 & y_1 & y_2 \\ G & F & C & N & 0 & z_1 & z_2 \\ L & M & N & D & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Un simple changement de signes des variables $(x_2 y_2 z_2 t_2)$ donne la seconde fonction.

4° *Notations symboliques.*

Comme précédemment, nous abrégerons les écritures par l'emploi de notations symboliques abrégées, ce qui nous permet d'écrire les identités qui viennent d'être démontrées et en ne conservant que les identités types, là où il y en a plusieurs analogues, sous les formes suivantes :

(XXXVII) $$S_{11} = -\frac{1}{E^2} \begin{vmatrix} E_r & 1 \\ 1 & \end{vmatrix}$$

(XXXVIII) $$S_{12} = -\frac{1}{E^2} \begin{vmatrix} E_r & 1 \\ 2 & \end{vmatrix}$$

(XXXIX) $$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} E_r & 12 \\ 12 & \end{vmatrix}$$

(XL) $$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix} = \frac{1}{E} \left| \frac{E_r}{13} \right| \begin{matrix} 12 \\ \end{matrix} \Big|$$

(XLI) $$\begin{vmatrix} S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \end{vmatrix} = \frac{1}{E} \left| \frac{E_r}{34} \right| \begin{matrix} 12 \\ \end{matrix} \Big|$$

(XLII) $$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = - \left| \frac{E_r}{123} \right| \begin{matrix} 123 \\ \end{matrix} \Big|$$

(XLIII) $$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} \end{vmatrix} = - \left| \frac{E_r}{124} \right| \begin{matrix} 123 \\ \end{matrix} \Big|$$

(XLIV) $$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} = E \left| \frac{E_r}{1234} \right| \begin{matrix} 1234 \\ \end{matrix} \Big|$$

(XLV) $$S(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2, t_1 - t_2) = S_{11} + S_{12} - 2S_{12} = \frac{1}{E^2} \left| \frac{E_r}{012} \right| \begin{matrix} 012 \\ \end{matrix} \Big|$$

IV. — FORMES TANGENTIELLES

Les formes quadratiques précédemment considérées sont dites *ponctuelles*, parce que les lettres x, y, z, t, désignent des coordonnées de points. A ces formes se rattachent d'autres formes quadratiques dites *tangentielles*, qui dérivent des premières : 1° par la substitution aux coordonnées de points des coordonnées de droites généralement désignées par les lettres u, v, w ; 2° par la substitution aux coefficients a, b, c, ..., des déterminants mineurs relatifs à ces éléments dans le discriminant de la forme ponctuelle.

Par exemple, à la forme quadratique ponctuelle homogène à trois variables :

$$S \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy,$$

se rattache la forme tangentielle :

$$\Sigma \equiv Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Guu + 2Huv,$$

dans laquelle les coefficients A, B, C, ..., des coordonnées tangentielles u, v, w, qui ont pris la place des coordonnées ponctuelles x, y, z, sont les déterminants mineurs respectifs des coefficients a, b, c, ..., de la forme ponctuelle dans le discriminant de celle-ci.

$$D \equiv \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

En d'autres termes, les coefficients A, B, C, ..., de la forme tangentielle ne sont autres que les éléments du déterminant :

$$D_r = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix},$$

réciproque du déterminant D, en sorte que la forme tangentielle Σ admet pour discriminant précisément le déterminant D_r. La réciprocité qui lie les déterminants D_r et D lie aussi les fonctions Σ et S, en sorte que la forme quadratique S se déduit de la forme tangentielle Σ exactement de la même manière que la forme Σ se déduit de la forme S.

Or, à la forme tangentielle Σ correspond, comme dans la forme ponctuelle, le déterminant fonctionnel :

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{vmatrix},$$

formé de la même manière que le déterminant fonctionnel de la forme ponctuelle. Ce déterminant fonctionnel est exprimable sous d'autres formes qui font l'objet d'identités absolument analogues à celles que nous venons d'établir.

Nous nous contenterons d'écrire ces identités, qui s'obtiennent par les procédés déjà employés, et celles écrites pour le cas de trois variables se généralisant aisément aux cas de deux et quatre variables. C'est ainsi qu'on a :

$$\Sigma_{11} = -\begin{vmatrix} a & h & g & u_1 \\ h & b & f & v_1 \\ g & f & c & w_1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 0 \end{vmatrix} \tag{46}$$

$$\Sigma_{12} = -\begin{vmatrix} a & h & g & u_1 \\ h & b & f & v_1 \\ g & f & c & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 0 \end{vmatrix} \tag{47}$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{vmatrix} = D\begin{vmatrix} a & h & g & u_1 & u_2 \\ h & b & f & v_1 & v_2 \\ g & f & c & w_1 & w_2 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 0 & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{48}$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} \end{vmatrix} = D\begin{vmatrix} a & h & g & u_1 & u_2 \\ h & b & f & v_1 & v_2 \\ g & f & c & w_1 & w_2 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 0 & 0 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{49}$$

$$(50)\qquad \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{vmatrix} = -D^2 \begin{vmatrix} a & h & g & u_1 & u_2 & u_3 \\ h & b & f & v_1 & v_2 & v_3 \\ g & f & c & w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(51)\qquad = D^2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}^2$$

Ces mêmes identités peuvent s'écrire abréviativement :

$$(XLII)\qquad \Sigma_{11} = -\left|\frac{D \mid 1}{1}\right|$$

$$(XLIII)\qquad \Sigma_{12} = -\left|\frac{D \mid 1}{2}\right|$$

$$(XLIV)\qquad \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{vmatrix} = D\left|\frac{D \mid 12}{12}\right|$$

$$(XLV)\qquad \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} \end{vmatrix} = D\left|\frac{D \mid 12}{13}\right|$$

$$(XLVI)\qquad \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{vmatrix} = -D^2\left|\frac{D \mid 123}{123}\right|.$$

De toutes façons, *il apparaît que le discriminant d'une forme quadratique ponctuelle à trois variables peut être encadré de une, deux ou trois lignes et colonnes identiques ou non, ayant pour éléments les coordonnées tangentielles* $(u_1v_1w_1)$, $(u_2v_2w_2)$, $(u_3v_3w_3)$, *complétées par des zéros en nombre voulu, de manière à former des déterminants d'ordre variant de* 4 *à* 6. Ces divers déterminants représentent le déterminant fonctionnel correspondant à la forme tangentielle réciproque de la forme ponctuelle et ses déterminants mineurs de divers ordres et de diverses natures.

PREMIÈRES APPLICATIONS

Dès le début de la géométrie analytique, la détermination d'un point M du plan par ses coordonnées x et y relatives à deux axes OX, OY faisant entre eux un angle θ conduit à exprimer, en fonction de ses coordonnées x et y, la distance OM $= \rho$ du point à l'origine. On trouve ainsi par la simple application d'une formule trigonométrique très connue :

$$(1)\qquad \rho^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta.$$

Le second membre de cette formule est une forme quadratique homogène à deux variables que nous désignerons par R, et à laquelle nous pouvons appliquer ce que nous avons démontré sur son développement en déterminant, ce qui nous donne :

$$\rho^2 = R \equiv - \begin{vmatrix} 1 & -\cos\theta & x \\ -\cos\theta & 1 & y \\ x & y & 0 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Egalement dès les premiers débuts de la géométrie analytique, une droite de direction donnée passant par l'origine est définie par les angles α et β qu'elle fait avec les axes de coordonnées. Toutefois, ces angles ne sont pas indépendants, car un seul d'entre eux suffit pour la détermination de la droite considérée ; ils sont liés entre eux par la relation :

$$\alpha + \beta = \theta,$$

qui, transformée trigonométriquement, devient :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta = \sin^2\theta. \tag{3}$$

Or, le premier membre de cette relation est encore une forme quadratique homogène à deux variables $\cos\alpha$ et $\cos\beta$; de plus, on peut remarquer que cette dernière forme est la forme tangentielle se rattachant à la forme ponctuelle précédente R, ce qui n'a rien d'étonnant, puisque les variables $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ sont, en fait, des cordonnées de droite. Nous désignerons cette nouvelle forme par Γ, et en lui appliquant ce qui a été dit sur son développement en déterminant, nous avons la relation :

$$\mathrm{Sin}^2\theta = \Gamma \equiv - \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos\alpha \\ \cos\theta & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta & 0 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Etant ainsi en possession de nos fonctions fondamentales, il suffit d'introduire des systèmes plus compliqués pour retrouver les formes secondaires qui se rattachent aux formes quadratiques à deux variables et les identités correspondantes. Nous allons considérer quelques-uns de ces systèmes composés.

1° *Couple de deux directions.*

Soient deux droites D_1, D_2 passant par l'origine et définis respectivement par les angles $(\alpha_1\beta_1)$ $(\alpha_2\beta_2)$, ou ce qui revient au même par leurs cosinus $(\cos\alpha_1, \cos\beta_1)$, $(\cos\alpha_2, \cos\beta_2)$. A ces cosinus se rattachent les deux formes déduites de la fonction Γ par l'introduction des valeurs particulières $(\cos\alpha_1 \cos\beta_1)$, $(\cos\alpha_2 \cos\beta_2)$. Conformément à la notation adoptée et par application répétée de la formule (4), nous avons les deux relations :

$$(5) \qquad \operatorname{Sin}^2\theta = \Gamma_{11} = -\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos\alpha_1 \\ \cos\theta & 1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(6) \qquad \operatorname{Sin}^2\theta = \Gamma_{22} = -\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos\alpha_2 \\ \cos\theta & 1 & \cos\beta_2 \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Angle des deux directions. — La considération simultanée des deux directions D_1 et D_2 introduit un élément nouveau qui est leur angle V ; celui-ci doit pouvoir s'exprimer en fonction des coordonnées $(\cos\alpha_1 \cos\beta_1)$, $\cos\alpha_2$ $(\cos\beta_2)$ des deux directions.

Pour cela, on prend sur la direction OD_1 un point quelconque M, autre que l'origine, de distance à celle-ci $OM = \rho$ et de coordonnées x et y. En projetant le contour de ses coordonnées successivement sur OX, OY et OD_2, on a les trois relations :

$$\begin{vmatrix} x & + y\cos\theta - \rho\cos\alpha_1 = 0 \\ x\cos\theta & + y - \rho\cos\beta_1 = 0 \\ x\cos\alpha_2 & + y\cos\beta_2 - \rho\cos V = 0 \end{vmatrix}$$

d'où par élimination de x, y et ρ :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos\alpha_1 \\ \cos\theta & 1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos V \end{vmatrix} = 0.$$

On tire de là :

$$\operatorname{Sin}^2\theta\cos V = -\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos\beta_1 \\ \cos\theta & 1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & 0 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire avec notre notation :

$$(1) \qquad \operatorname{Sin}^2\theta\cos V = \Gamma_{12}.$$

En tenant compte des formules (5) et (6), la valeur cherchée de cos V peut s'écrire :

$$\cos V = \frac{\Gamma_{12}}{\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{12}}} = \frac{\Gamma_{21}}{\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}. \tag{8}$$

Calcul de sin V. — On a :

$$\sin^2 V = 1 - \cos^2 V = \begin{vmatrix} 1 & \cos V \\ \cos V & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\Gamma_{12}}{\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}} \\ \dfrac{\Gamma_{21}}{\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplions la première ligne et la première colonne par $\sqrt{\Gamma_{11}}$, puis la seconde ligne et la seconde colonne par $\sqrt{\Gamma_{22}}$, en ayant soin de diviser hors barres par les mêmes facteurs, il vient :

$$\sin^2 V = \frac{1}{\Gamma_{11}\Gamma_{22}} \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix};$$

d'où :

$$\sin V = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{12}}}. \tag{9}$$

En appliquant au numérateur celle des identités fondamentales qui lui est appliquable, il nous vient :

$$\sin^2 V = \frac{1}{\Gamma_{11}\Gamma_{22}} \times \begin{vmatrix} 1 & -\cos\theta \\ -\cos\theta & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 \end{vmatrix}^2$$

ou

$$\sin^2 V = \frac{1}{\Gamma_{11}\Gamma_{22}} \sin^2\theta \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 \end{vmatrix}^2 = \frac{1}{\sin^2\theta} \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 \end{vmatrix}^2,$$

d'où enfin :

$$\sin\theta \sin V = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

2° *Couple de deux points.*

Soient M_1, M_2, deux points de coordonnées respectives $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$. Il y a lieu de considérer et d'exprimer en fonction de ces coordonnées les éléments suivants :

1° Les distances à l'origine des deux points M_1, M_2 ;
2° La distance M_1M_2 des deux points ;
3° Les angles que font avec les axes les rayons vecteurs OM_1, OM_2;
4° L'angle des rayons vecteurs OM_1, OM_2 ;
5° L'aire du triangle OM_1M_2 ;
6° La distance de l'origine à la droite M_1M_2.

1° *Distances des points à l'origine.* — En désignant ces distances par ρ_1, ρ_2, on a évidemment :

$$\rho_1^2 = R_{11},$$
$$\rho_2^2 = R_{22}.$$

2° Désignons par l la distance M_1M_2. Il suffit, pour la calculer, de transporter l'origine au point M_1, et l'on a immédiatement :

$$(11)\qquad l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2\,(x_2 - x_1)\,(y_2 - y_1)\cos\theta\,;$$

c'est-à-dire :

$$l^2 = R\,(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

ou

$$(12)\qquad l^2 = R_{11} + R_{22} - 2R_{12},$$

ou encore à l'aide d'une identité démontrée :

$$(13)\qquad l^2 = \begin{vmatrix} 1 & -\cos\theta & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ -\cos\theta & 1 & 0 & 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & \end{vmatrix},$$

et symboliquement :

$$(13^1)\qquad l^2 = \left| \frac{C_r}{012}\,|\,012 \right|,$$

moyennant qu'on désigne par C_r le déterminant réciproque du discriminant :

$$C = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

de la fonction R.

3° Pour trouver les angles α_1 et β_1 du rayon vecteur OM_1 avec les axes OX et OY, nous rappellerons que les projections du contour des OP_1M_1 coordonnées du point M_1 sur les axes OX et OY donne :

$$\begin{cases} x_1 + y_1\cos\theta - \rho_1\cos\alpha_1 = 0 \\ x_1\cos\theta + y_1 - \rho_1\cos\beta_1 = 0, \end{cases}$$

d'où :

$$4) \qquad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \dfrac{x_1 + y_1\cos\theta}{S_1} = \dfrac{\frac{1}{2}R'_{1x_1}}{\sqrt{R_{11}}} \\ \cos\beta_1 = \dfrac{x_1\cos\theta + y_1}{S_1} = \dfrac{\frac{1}{2}R'_{1y_1}}{\sqrt{R_{11}}} \end{cases}$$

On aura de même :

$$(15) \qquad \begin{cases} \cos\alpha_2 = \dfrac{\frac{1}{2}R'_{2x_2}}{\sqrt{R_{22}}} \\ \cos\beta_2 = \dfrac{\frac{1}{2}R'_{2y_2}}{\sqrt{R_{22}}}. \end{cases}$$

Quant aux sinus des mêmes angles, ils sont fournis directement par la considération des triangles OP_1M_1, OP_2M_2, qui donnent :

$$(16) \qquad \begin{cases} \sin\alpha_1 = \dfrac{y_1\sin\theta}{\sqrt{R_{11}}} \\ \sin\beta_1 = \dfrac{x_1\sin\theta}{\sqrt{R_{11}}} \end{cases}$$

$$(17) \qquad \begin{cases} \sin\alpha_2 = \dfrac{y_2\sin\theta}{\sqrt{R_{22}}} \\ \sin\beta_2 = \dfrac{x_2\sin\theta}{\sqrt{R_{22}}}. \end{cases}$$

4° L'angle $M_1OM_2 = V$ des rayons vecteurs OM_1, OM_2 est fourni par le triangle OM_1M_2, qui donne la relation:

$$l_2^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos V.$$

En remplaçant l^2, ρ_1^2, ρ_2^2 par leurs valeurs trouvées, il vient après simplification :

$$(18) \qquad \cos V = \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}} = \frac{-\left|\frac{C_r}{2}\right|^1}{\sqrt{\left|\frac{C_r}{1}\right|^1 \times \left|\frac{C_r}{2}\right|^2}}.$$

On peut encore calculer l'angle V par son sinus. On a alors successivement :

$$\sin^2 V = \begin{vmatrix} 1 & \cos V \\ \cos V & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}} \\ \frac{R_{21}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{R_{11}R_{22}} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix};$$

d'où :

$$(19) \qquad \sin V = \frac{\left|\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}} = \frac{\sqrt{C}\left|\frac{C_r}{12}\right|^{12\,\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left|\frac{C_r}{1}\right|^1 \times \left|\frac{C_r}{2}\right|^2}}.$$

On a aussi, en vertu d'une des identités fondamentales :

$$\sin^2 V = \frac{1}{R_{11}R_{22}} \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2.$$

On tire de là :

$$(19') \qquad \sin V = \frac{\left|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right| \sin\theta}{\sqrt{R_{11}R_{22}}}.$$

5° L'aire S du triangle OM_1M_2 s'obtient ensuite aisément par la relation :

$$2S = \rho_1\rho_2 \sin V,$$
$$= \sqrt{R_{11}R_{22}} \sin V,$$

laquelle, à l'aide de la formule (19), devient :

$$2S = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^2 \tag{20}$$

ou encore :

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \sin\theta.$$

6° Enfin la distance δ de l'origine O à la droite M_1M_2 s'obtient encore par la considération du triangle OM_1M_2, qui donne :

$$lS = 2\delta ;$$

d'où :

$$\delta = \frac{2S}{l}$$

et finalement :

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \sin\theta}{\sqrt{\begin{vmatrix} C_r & 012 \\ 012 & \end{vmatrix}}}. \tag{21}$$

Les calculs précédents montrent que, étant donnés deux points du plan définis par leurs coordonnées, ces coordonnées d'une part, les combinaisons qu'on peut former avec ces coordonnées d'autre part, et aussi les fonctions quadratiques R_{11}, R_{12}, ainsi que les diverses formes que nous y avons rattachées, ont toutes leur signification géométrique spéciale, en sorte qu'on a ainsi l'interprétation complète de la géométrie par l'algèbre en même temps que l'image de l'algèbre par la géométrie.

3° *Système de trois points formant un triangle.*

Soient M_1, M_2, M_3, les trois points donnés de coordonnées respectives (x_1y_1), (x_2y_2), (x_3y_3). Il y a lieu de considérer et d'exprimer à l'aide de ces coordonnées :

1° Les distances des différents points à l'origine ;
2° Les angles formés par leurs rayons vecteurs deux à deux ;
3° Les longueurs des côtés du triangle formé par les trois points ;
4° Les angles de ce triangle ;
5° L'aire de ce même triangle.

Les réponses aux trois premières questions sont fournies par leurs

formules déjà trouvées dans les deux paragraphes précédents, à la condition d'y introduire les indices convenables.

La question véritablement nouvelle est celle relative à la détermination des angles du triangle. Transportons pour cela l'origine au point M_1 et appliquons à la nouvelle origine la formule (18) ; nous aurons : en désignant par l_2 et l_3 les longueurs M_1M_2, M_1M_3 :

$$\cos M_2M_1M_3 = \frac{-1}{l_2l_3}\begin{vmatrix} 1 & -\cos\theta & x_2-x_1 \\ -\cos\theta & 1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{l_2l_3}\begin{vmatrix} 1 & -\cos\theta & 0 & x_1 & x_2 \\ -\cos\theta & 1 & 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{22}$$

ou symboliquement :

$$\cos M_1 = \frac{\left|\frac{C_r}{013}\,|\,012\right|}{\sqrt{\left|\frac{C_r}{012}\,|\,012\right| \times \left|\frac{C_r}{013}\,|\,013\right|}}. \tag{23}$$

On obtient les deux autres cosinus par de simples permutations des indices.

La même transposition d'origine permet, par l'application de la formule (19), le calcul de $\sin M_1$. On a ainsi :

$$\sin M_1 = \frac{\sqrt{C}\left|\frac{C_r}{0123}\,|\,0123\right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left|\frac{C_r}{012}\,|\,012\right| \times \left|\frac{C_r}{013}\,|\,013\right|}}. \tag{24}$$

$$2S = l_2l_3 \sin M_1,$$

et conduit à la formule

$$2S = \sqrt{C}\left|\frac{C_r}{0123}\,|\,0123\right|^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Résumé

Pour mieux faire comprendre l'esprit de notre méthode et ses avantages, nous réunirons dans un tableau d'ensemble les principaux résultats obtenus dans l'étude des systèmes considérés, en n'y faisant toutefois figurer que les éléments caractéristiques.

I. — Directions

1° *Direction unique.* — Relation entre les cosinus directeurs. — On pose :

$$C = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = \sin^2\theta,$$

et l'on a :

$$C = \Gamma_{11} = -\begin{vmatrix} \frac{C}{1} & 1 \end{vmatrix}.$$

2° *Couple de deux directions.* — Angle des deux directions :

$$\cos(1,2) = \frac{\Gamma_{12}}{\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{12}}} = \frac{-\begin{vmatrix} \frac{C}{2} & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \frac{C}{1} & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{C}{2} & 2 \end{vmatrix}}}$$

$$\sin(1,2) = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11}\Gamma_{12} \\ \Gamma_{21}\Gamma_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}} = \frac{\sqrt{C}\begin{vmatrix} \frac{C}{12} & 12 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \frac{C}{1} & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{C}{2} & 2 \end{vmatrix}}}.$$

II. — Points

Eu égard à la nature des formules, il y a lieu de les partager en deux catégories, suivant qu'elles expriment les relations des points ou systèmes de points avec l'origine, ou bien les relations des points entre eux.

1er groupe.— Relations avec l'origine :

1° *Point unique.* — Distance à l'origine ou longueur du rayon vecteur :

$$\rho_1^2 = R_{11} = -\left|\begin{matrix} C_r & 1 \\ \hline 1 & \end{matrix}\right|.$$

2° *Couple de deux points.* — a) Angle des deux rayons vecteurs :

$$\cos(1,2) = \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}\,R_{22}}} = \frac{-\left|\begin{matrix} C_r & 1 \\ \hline 2 & \end{matrix}\right|}{\sqrt{\left|\begin{matrix} C_r & 1 \\ \hline 1 & \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} C_r & 2 \\ \hline 2 & \end{matrix}\right|}}$$

$$\sin(1,2) = \frac{\left|\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R_{11}\,R_{22}}} = -\frac{\sqrt{C}\left|\begin{matrix} C_r & 12 \\ \hline 12 & \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left|\begin{matrix} C_r & 1 \\ \hline 1 & \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} C_r & 2 \\ \hline 2 & \end{matrix}\right|}}.$$

b) Aire du triangle OM_1M_2 :

$$2S = \left|\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{C}\left|\begin{matrix} C_r & 12 \\ \hline 12 & \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

2e groupe. — Relations de points entre eux.

1° *Couple de deux points.* — Distance des deux points :

$$l_{12}^2 = \left|\begin{matrix} C_r & 012 \\ \hline 012 & \end{matrix}\right|.$$

2° *Système de trois points.* — a) Angle de sommet M_1 dans le triangle M_1, M_2, M_3 :

$$\cos M_1 = \frac{\left|\begin{matrix} C_r & 012 \\ \hline 013 & \end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix} C_r & 012 \\ \hline 012 & \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix} C_r & 013 \\ \hline 013 & \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin M_1 = \frac{\sqrt{C}\left|\frac{C_r}{0123}\right|^{\frac{1}{2}}}{\left|\frac{C_r}{012}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{C_r}{013}\right|^{\frac{1}{2}}}.$$

b) Aire du triangle $M_1M_2M_3$:

$$2S = \sqrt{C}\left|\frac{C_r}{0123}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Les formules du second groupe se distinguent de celles du premier en ce qu'elles ne contiennent pas le déterminant fonctionnel :

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{21} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix},$$

ni aucun de ses éléments.

L'explication de ce fait est facile à donner. Nous rappellerons pour cela que, à ce déterminant et à ces éléments, correspond, d'après notre théorie, un déterminant du second ordre :

$$C_r = \begin{vmatrix} 1 & -\cos\theta \\ -\cos\theta & 1 \end{vmatrix},$$

lequel, envisagé comme noyau de formation d'autres déterminants, peut être encadré de lignes et de colonnes de coordonnées dont le nombre ne peut surpasser 2.

Or, la figure élémentaire complète de la géométrie plane est le triangle, lequel peut être défini par ses trois sommets. Et alors, pour que nos formules soient applicables à celui-ci, il est nécessaire que nous ayons un noyau du troisième ordre, de façon qu'il puisse être encadré de trois lignes et de trois colonnes de coordonnées. C'est ce que notre méthode elle-même indique en substituant au noyau C_r le noyau suivant du troisième ordre :

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Seulement, pour encadrer ce noyau, deux coordonnées x et y ne suffisent pas; une troisième coordonnée est nécessaire, laquelle est représentée par l'unité en coordonnées cartésiennes.

On est ainsi conduit aux formules du second groupe qui n'ont pas d'analogues dans celle du premier, et diffèrent de celles-ci par leur défaut d'homogénéité en x et y.

Toutes ces circonstances nous conduisent à conclure que les coordonnées cartésiennes, malgré leur simplicité apparente, ne sont pas les coordonnées naturelles de la géométrie plane, et nous amèneraient, pour la force même du calcul, à imaginer les coordonnées homogènes, si celles-ci n'étaient pas déjà inventées.

Nous donnerons dans d'autres mémoires des applications plus étendues et plus caractéristiques de nos identités.

VARIATIONS DE TEMPÉRATURE, DE DENSITÉ ET DE TENEUR EN OXYGÈNE DE L'EAU DE MER LITTORALE, A CONCARNEAU ET A ARCACHON ;

Par R. LEGENDRE.

La région littorale est une des plus intéressantes pour le biologiste, tant par la richesse que par la diversité de sa faune et de sa flore. De plus, les animaux qui l'habitent ont été l'objet, depuis quelques années, d'un grand nombre d'observations sur les variations de leurs réactions physiologiques. Enfin la zone littorale a encore une grande importance au point de vue pratique, puisqu'elle est la région de pêche la plus exploitée. Cependant les données physico-chimiques la concernant sont peu nombreuses, la plupart des recherches de température, de densité, de gaz dissous ayant eu lieu au large et n'ayant porté le plus souvent que sur les variations en profondeur.

Pendant les étés de 1907 et 1908, j'ai étudié les variations de température, de densité et d'oxygène dissous de l'eau de la côte à Concarneau; pendant l'été de 1909, j'ai fait les mêmes recherches en un point très différent par la nature de sa côte, le régime saumâtre de ses eaux, la pauvreté relative de sa faune et de sa flore, à Arcachon.

Sans entrer ici dans le détail de ces observations (1), j'énoncerai seulement les résultats les plus généraux que j'ai obtenus.

1. *Variations de température.* — A Concarneau et à Arcachon, la température de l'eau de la côte varie pendant la journée. A Concarneau, son maximum a lieu de deux à cinq heures de l'après-midi, son minimum un peu avant le lever du jour; le maximum a lieu à une heure différente suivant la marée : pendant les marées de morte eau (basse mer vers six heures), il a lieu vers cinq heures de l'après-midi; pendant les grandes marées (basse mer vers midi), il a lieu vers deux heures. A Arcachon, les variations journalières de température sont beaucoup plus grandes; le minimum a lieu également un peu avant l'aube, mais le maximum se produit toujours de deux à

(1) Cf. R. LEGENDRE, *Recherches physico-chimiques sur l'eau de la côte à Concarneau* (*Bull. de l'Inst. Océanog.*, n° 144, 30 juin 1909), et *Recherches sur les variations de température, de densité et de teneur en oxygène de l'eau de la côte à Arcachon* (*Bull. de la Stat. Biol. d'Arcachon*, 1909).

trois heures de l'après-midi sans être influencé par l'heure de la marée. Ces différences entre les deux points examinés s'expliquent par la différence de nature du sol littoral. A Concarneau, la côte rocheuse absorbe lentement la chaleur solaire et la perd de même, régularisant ainsi la température de l'eau; de plus, l'eau du large étant plus froide que l'eau littorale, la température baisse à mer montante et augmente à mer descendante. A Arcachon, au contraire, la côte sableuse subit rapidement les variations de température, s'échauffe très brusquement sous l'influence de l'insolation et se refroidit de même quand la nuit est venue, produisant de grands changements de température dans l'eau qui la baigne (1); de plus l'eau qu'on observe à tous les moments de la marée a déjà passé sur le sable et subit peu l'influence thermique de l'eau du large. A Concarneau comme à Arcachon, les variations journalières sont plus grandes par grandes marées que pendant les mortes eaux.

2. *Variations de densité.* — Dans les deux points que j'ai examinés, la densité varie avec la marée, les plus faibles s'observant à marée basse, les plus fortes à mer haute. Mais ces variations sont beaucoup plus considérables à Arcachon qu'à Concarneau; ce fait est dû au régime saumâtre du bassin d'Arcachon dont les eaux se mélangent, à mer descendante, à l'eau douce accumulée à l'embouchure des rivières qui s'y jettent, et à mer montante, à l'eau du large de densité plus élevée. Les variations de densité sont moindres pendant les mortes eaux que pendant les grandes marées.

Outre ces variations rythmiques, il en est d'autres beaucoup moins régulières dont les plus importantes sont dues aux pluies.

3. *Variations d'oxygénation.* — La teneur en oxygène de l'eau de la côte à Concarneau et à Arcachon présente des variations journalières; elle est maxima de midi à trois heures de l'après-midi, minima un peu avant le lever du jour. Ces variations sont plus grandes par les jours ensoleillés que par un temps nuageux, brumeux ou pluvieux. Elles s'expliquent par l'assimilation chlorophyllienne et la respiration des êtres vivants de la zone littorale : le jour, sous l'influence solaire, et surtout au moment du plus grand éclairement, les algues tapissant le fond sous une faible épaisseur d'eau produisent en abondance de l'oxygène; la nuit, au contraire, les plantes et les animaux consomment l'oxygène de l'eau qui n'est remplacé que lentement par dissolution à la surface de celui de l'air.

(1) Cette différence de nature du sol de la côte influe également sur l'intensité des vents solaires.

L'eau littorale de Concarneau, dont la flore et la faune sont abondantes, présente une teneur en oxygène et des variations journalières beaucoup plus grandes que celles de l'eau d'Arcachon.

Ces observations sur l'oxygène dissous soulèvent un problème intéressant : les variations d'oxygénation sont à peu près synchrones de celles de température, contrairement aux lois physiques de solubilité des gaz ; la nuit, fréquemment, l'eau n'est plus saturée d'oxygène ; le jour, au contraire, sa teneur dépasse le coefficient de solubilité. Cette apparente contradiction aux lois physiques est difficile à expliquer, et je n'ai pu encore la résoudre.

En résumé, de l'ensemble des recherches faites jusqu'à ce jour, il résulte que :

1° Les variations de température ont un rythme journalier, faiblement influencé en certains points par le rythme des marées. La grandeur de ces variations est en rapport avec la nature de la côte ;

2° Les variations de densité ont un rythme de marée. Leur amplitude dépend en partie du régime plus ou moins saumâtre des eaux ;

3° Les variations d'oxygénation ont un rythme journalier. Elles sont en rapport avec la richesse de la flore et de la faune littorales.

LES POISSONS DU GENRE *VANDELLIA* C. V.

Par M. le Dr Jacques PELLEGRIN

Les *Vandellia* sont de petits Poissons siluridés de l'Amérique du Sud, extrêmement rares dans les collections et fort mal connus. Leurs mœurs sont des plus curieuses; ils paraissent vivre habituellement, suivant les uns en commensaux, suivant les autres en parasites, sur les branchies d'autres grands Poissons également de la même famille et appartenant au genre *Platystoma*, c'est ce qui les a fait placer par A. Günther (1) dans une division spéciale, celle des *Siluridæ branchicolæ*. D'après différents observateurs ces petits Poissons, ainsi qu'on le verra plus loin, seraient aussi fort redoutables pour l'Homme.

On n'a distingué jusqu'ici que deux espèces de *Vandellia*, dont les types, d'ailleurs en assez mauvais état, à cause de leur ancienneté, se trouvent au Muséum d'histoire naturelle de Paris, le *Vandellia cirrhosa* C. V. et le *Vandellia Plazai* Castelnau.

Les individus qui ont servi à Cuvier et à Valenciennes comme types du genre Vandellie et de l'espèce *Vandellia cirrhosa* avaient été envoyés, en 1808, à Lacépède sans indication de provenance, par M. Vandelli, professeur d'histoire naturelle à Lisbonne. La description faite en 1846 (2) doit être rectifiée et complétée sur certains points.

La hauteur du corps est bien comprise environ dix fois dans la longueur totale, soit environ neuf fois dans la longueur sans la caudale. A la machoire supérieure les dents en crochets que Cuvier et Valenciennes disent insérées sur le chevron du vomer, mais qui pourraient bien être tout simplement sur les intermaxillaires, sont au nombre de 5, ainsi que l'écrivent les auteurs de l'*Histoire naturelle des Poissons ;* cependant ce chiffre semble un peu au-dessous de la réalité, car il semble que quelques dents latérales se sont détachées. En outre, les célèbres naturalistes signalent bien les 6 à 8 épines assez fortes et recourbées qui garnissent, au-dessous de la tête, le bord du préopercule ou plutôt, semble-t-il autant qu'on en peut juger, de l'interopercule; mais ils ne mentionnent pas, au-dessus de la tête

(1) A. Günther, *Cat. Fish. Brit. Mus.*, 1864, V, p. 276.
(2) Cuvier et Valenciennes, *Hist. nat. Poissons*, 1846, XVIII, p. 386, pl. 547.

les 5 à 6 épines à peu près semblables de l'opercule. Le barbillon fait environ la moitié de la longueur de la tête, il y a bien 8-9 rayons à la dorsale, 9-10 à l'anale, mais à la pectorale on ne compte que 6 rayons et non 8 comme l'indiquent Cuvier et Valenciennes dans leur description (1). La caudale n'est pas tronquée, mais très légèrement échancrée, à lobes arrondis, égaux. Les formules rectifiées des nageoires seront donc les suivantes :

D . 8-9; A . 9-10; P . 6; V . 6.

Le Muséum possède, en outre, un spécimen de cette espèce recueilli par M. F. Geay au Vénézuela, dans l'Apuré affluent de la rive gauche de l'Orénoque, et deux petits exemplaires envoyés de Manaos (Brésil) par M. Jacquot d'Anthonay, vice-consul de France. L'examen de ces échantillons montre que chez le *Vandellia cirrhosa* C. V. le nombre des dents en crochets peut s'élever à 8.

Le spécimen type de *Vandellia Plazai* Castelnau a été récolté par ce voyageur dans le rio Ucayale, au Pérou, en 1846, et décrit par lui en 1855 (2). Cette espèce se distingue facilement de la précédente par ses formes plus allongées, la hauteur du corps étant contenue environ 13 fois dans la longueur totale; la tête est plus arrondie, le barbillon fait moins de la moitié de la longueur de la tête, la pectorale est aussi longue que la tête. La caudale est échancrée à lobes pointus. On compte 8 ou 9 dents en crochets à la mâchoire supérieure, 7 ou 8 épines interoperculaires, une douzaine d'épines operculaires en 3 ou 4 rangées. Les formules des nageoires sont assez semblables à celles de l'espèce précédente :

D . 9; A . 8; P . 7; V . 5.

Un autre très beau spécimen de cette espèce pêché par le Dr Jobert au Calderão, dans le rio Solimoens (Haut-Amazone), existe également dans les collections du Muséum de Paris.

Enfin un dernier exemplaire capturé en 1881 par M. Charles Wiéner, dans le rio Napo (Equateur) me paraît devoir constituer le type d'une troisième espèce qui portera le nom de *Vandellia Wieneri* et dont on trouvera la description ci-dessous (3).

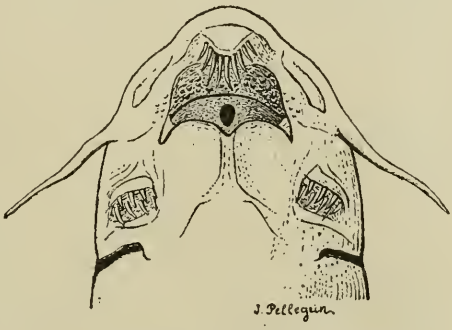
(1) La figure est exacte et ne représente que 6 rayons à la pectorale.

(2) F. de Castelnau, *Anim. nouv. ou rares Amérique Sud : Poissons*, 1855, p. 51, Pl. XXVIII, *fig.* 1.

(3) Une diagnose sommaire de cette espèce a été donnée : J. Pellegrin, *Sur un*

Vandellia Wieneri nov. sp.

La hauteur du corps, un peu supérieure à la longueur de la tête, est comprise 7 fois dans la longueur, sans la caudale. La tête est aplatie, semi-circulaire, légèrement plus longue que large. Le museau est arrondi, proéminent. La bouche est petite, infère. En haut et en avant se trouve une demi-couronne composée de 9 dents aiguës, en forme de crochets, à pointe dirigée vers l'intérieur; ces dents sont normalement couchées, mais susceptibles d'un certain degré d'érection; les médianes sont beaucoup plus longues que les latérales. En arrière des dents, la cavité buccale est tapissée de nombreuses papilles, puis limitée par un repli assez prononcé. Sur les côtés les lèvres sont assez épaisses. La machoire inférieure, fortement échancrée en son milieu, est complètement dépourvue de dents; en arrière s'élève un vaste voile membraneux, percé en son centre d'une petite ouverture qui ne paraît pas accidentelle; ce voile, en se rapprochant du repli supérieur, ferme ainsi toute la partie antérieure de la cavité buccale; à l'état de repos il se rabat postérieurement. Le barbillon maxillaire situé à une certaine distance en arrière de l'angle buccal fait environ le tiers de la longueur de la tête. Les yeux sont petits, ovalaires, leur grand diamètre est un peu inférieur à l'espace interorbitaire et à 2 fois leur distance du bout du museau. De chaque côté en arrière du dessus de la tête existe un groupe d'une quinzaine d'épines operculaires, placées sur 4 rangées; ces épines très acérées et ressemblant tout à fait aux dents ont la pointe dirigée en haut et en arrière. Au-dessous de la tête, au niveau de l'aplomb du bord postérieur de l'œil se trouve de chaque côté un autre groupe d'épines interoperculaires acérées, crochues, à pointe dirigée en dedans et en arrière, au nombre de 7 ou 8 sur deux rangs;



Tête de *Vandellia Wieneri* vue en dessous (grossie 4 fois)

Poisson parasite nouveau du genre « Vandellia » (*C. R. Ac. Sc.*, 29 novembre 1909).

ces épines sont aussi susceptibles de se dresser légèrement. L'ouverture branchiale est très réduite, à peine égale en longueur au grand diamètre de l'œil. L'intestin est simple sans circonvolutions. La dorsale dont les rayons médians plus élevés forment une pointe et correspondent aux premiers rayons de l'anale, débute 2 fois 3/4 plus près de l'origine de la caudale que du bout du museau ; elle comprend 4 rayons simples, les premiers rudimentaires, et 7 rayons branchus. L'anale est formée de 5 rayons simples, les antérieurs aussi rudimentaires, et de 5 rayons branchus. Les pectorales sont un peu plus courtes que la tête et comprennent 6 rayons. Les ventrales à 5 rayons commencent un peu en avant du dernier tiers du corps. Le pédicule caudal est 2 fois 1/2 plus long que haut. La caudale est fourchue, à lobes pointus.

La coloration générale est olivâtre, les nageoires grisâtres.

D . 11 ; A . 10 ; P . 6 ; V . 5.

N° A 9934. Coll. Mus. — Rio Napo, près de l'embouchure du rio Misahually (Equateur) (1) : Ch. Wiéner.
Longueur 81 + 11 = 92 millimètres.

Cette espèce se distingue de *Vandellia cirrhosa* C. V., dont elle est assez voisine, par son corps plus court, son barbillon maxillaire faisant le tiers de la tête, sa caudale fourchue.

Voici d'ailleurs les caractères qui permettront de différencier les trois formes actuellement connues du genre *Vandellia* :

Hauteur de corps 7 fois dans la longueur sans la caudale. Barbillon faisant le tiers de la longueur de la tête. Pectorales plus courtes que la tête. Caudale fourchue, à lobes pointus..... *Vandellia Wieneri*, nov. sp.

Hauteur du corps 9 fois dans la longueur sans la caudale. Barbillon faisant la moitié de la longueur de la tête. Pectorales plus longues que la tête. Caudale très légèrement échancrée, à lobes arrondis, égaux. . . . . *Vandellia cirrhosa* C. V.

Hauteur du corps 12 fois dans la longueur sans la caudale. Barbillon faisant moins de la moitié de la longueur de la tête. Pectorales aussi longues que la tête. Caudale échancrée, à lobes pointus... *Vandellia Plazai* Castelnau.

(1) Ces renseignements viennent de m'être aimablement fournis par M. Charles Wiéner, ministre plénipotentiaire de France, de retour d'une nouvelle mission dans l'Amérique du Sud.

La disposition très particulière des appareils buccal et operculaire nettement visible sur le *Vandellia Wieneri* indique une grande spécialisation et paraît établir un parasitisme fort avancé.

Ces constatations peuvent ainsi apporter quelques éclaircissements sur les mœurs singulières des Poissons du genre *Vandellia*. Il ne sera donc pas sans intérêt de jeter un coup d'œil d'ensemble sur ce que l'on connaît actuellement à ce sujet.

C'est une croyance répandue depuis longtemps parmi les Indiens du Brésil que les baigneurs peuvent être attaqués par un petit Poisson du nom de *Candiru* qui, attiré par l'odeur de l'urine, pénètre dans l'urèthre et y détermine des désordres graves, suivis généralement de mort. La chose est déjà consignée dans le grand *Atlas des Poissons du Brésil* de Spix et Martius [1]. Toutefois, Agassiz, à qui sont dues les descriptions des Poissons de cet *Atlas*, attribue ces méfaits soit à une des deux espèces qu'il fait connaître du genre *Cetopsis*, le *Cetopsis cæcutiens*, ou celui qu'il nomme justement *Cetopsis candirú*, soit à une troisième espèce plus petite.

Les *Cetopsis*, autres Siluridés fort éloignés des Vandellies, doivent être mis hors de cause, mais il y a lieu de noter que les deux formes vivent dans les mêmes parages. C'est ainsi que le *Vandellia Wieneri*, décrit plus haut, se trouvait accompagner justement plusieurs spécimens, la plupart beaucoup plus volumineux, de *Cetopsis candiru* Agassiz; on s'explique ainsi, dans une certaine mesure, que l'on ait pu confondre les jeunes de cette dernière espèce et les Vandellies adultes, puisqu'il s'agit, en somme, de Poissons de la même famille, fréquentant les mêmes régions.

F. de Castelnau [2] parlant de son *Trichomycterus pusillus* que Günther ramène au *Pariodon microps* Kner, forme assez voisine des Vandellies, s'exprime ainsi : « Cette espèce est, de la part des pêcheurs de l'Araguay, l'objet d'un préjugé des plus singuliers, ils prétendent qu'il est très dangereux d'uriner en rivière : car, disent-ils, ce petit animal s'élance hors de l'eau et pénètre dans l'urèthre en remontant le long de la colonne liquide. »

Comme on le voit, on est ici en plein domaine des légendes indiennes. C'est d'une invraisemblance évidente, néanmoins il y a peut-être dans ces exagérations, souvent répétées, une base de vérité.

A. Günther, en rappelant ces divers récits à propos du genre

[1] Ph. de Martius, *Selecta genera et species Piscium quos in itinere per Brasiliam an.* 1817-20 *collegit ;* 1823-31, p. VIII.

[2] *Op. cit.*, p. 50.

Vandellia (1), puis plus tard au sujet des genres *Stegophilus* et *Vandellia*, ramène les choses au point. « Ces faits, écrit-il, demandent confirmation, mais il n'est pas douteux que ces Poissons vivent en parasites dans la cavité branchiale de gros Poissons (genre *Platystoma*). » Il émet ensuite une seconde supposition qui, par contre, ne me paraît pas exacte : « Il est probable, ajoute-t-il, en effet, qu'ils ne pénètrent dans ces cavités seulement que comme dans des places de sûreté, sans tirer aucune subsistance de leur hôte. » Les Vandellies, ainsi que l'indiquent le développement des épines operculaires et interoperculaires, la spécialisation de l'appareil buccal du *Vandellia Wieneri*, ne sont pas de simples commensaux, mais des parasites vivant certainement aux dépens de leur hôte.

G.-A. Boulenger (2), en présentant à la Société zoologique de Londres des spécimens du *Vandellia cirrhosa* C. V., recueillis dans le rio Jurua, au Brésil, par le Dr Bach, fournit ensuite des renseignements beaucoup plus catégoriques qu'il tient de ce praticien établi à la Plata. Le *Candiru* (c'est décidément le nom indien des Vandellies) est encore accusé de s'introduire dans l'urèthre des baigneurs, où il est attiré par l'odeur de l'urine, il y cause des désordres se terminant par la mort. Les indigènes du district de Jurua n'osent se baigner que muni d'un appareil protecteur spécial. Enfin lorsqu'un *Candiru* pénètre dans l'urèthre, les Indiens n'hésitent pas à recourir à une amputation immédiate du pénis.

Le Dr C. Jobert qui accomplit au Brésil, en 1877, un voyage où il rassembla des matériaux ichtyologiques considérables, a consacré à la question du Candiru un mémoire des plus documentés, où il n'admet pas sans réserve les déclarations du praticien américain cité par G.-A. Boulenger. « Le Dr Bach, écrit-il (3), n'a pas vu le petit Poisson *in situ* ; la chose est regrettable et, cette fois encore, nous ne sortons pas du cercle de la légende. »

Toutefois, le Dr Jobert rapporte (4) les dires d'un médecin très estimé de Belem (Para), le Dr Castro, qui lui affirma avoir « extrait de l'urèthre d'une négresse un petit *Candiru* qui y avait pénétré pendant la miction, alors qu'elle se baignait en rivière ».

Mais ce qui fait le grand intérêt de l'article du Dr Jobert, ce sont

(1) A. Günther, *Cat. Fish. Brit. Mus.*, 1864, V, p. 277, et *An introduction on the study of Fishes*, 1880, p. 581.

(2) G.-A. Boulenger, *Pr. Zool. Soc. London*, 1897, p. 901 et 920.

(3) Dr C. Jobert, *Sur la prétendue pénétration de Poissons dans l'urèthre* [*Arch. Parasitologie*, 1898 (1), p. 494].

(4) *Loc. cit.*, *p.* 498.

les renseignements qu'il a pu lui-même recueillir sur place au Brésil au sujet des *Candirus* (1).

Les Paraenses en distingueraient deux espèces, l'une petite qui s'introduirait dans l'urèthre des baigneurs, l'autre de plus grande taille, « trop grande pour tenter ces mêmes opérations, mais redoutable par les blessures qu'elle fait sur n'importe quelle partie du corps. On donne à cette dernière le nom de *Candiru de Cavallo* et les indigènes prétendent qu'elle attaque les chevaux pendant la baignade ». Au sujet de celle-ci il rapporte en outre les faits suivants :

« Un jour, à un mille environ en aval de Para, je voulus me baigner sans souci des Candirus qu'on m'assurait être très abondants en cet endroit. Je n'étais pas dans l'eau depuis cinq minutes que je ressentis dans la région lombaire, au ventre, sur les côtés de la poitrine, comme de légers coups de griffes qui se succédaient rapidement. Voyant l'eau se teinter de rouge autour de moi, je me hâtai de regagner le rivage et je constatai que, dans la région ou j'avais éprouvé la sensation de ces coups de griffe, le sang s'échappait de blessures en scarifications parallèles, qui eussent pu être attribuées à un instrument, tant elles étaient régulières ; elles constituaient des groupes de 5 à 6 lignes, longues d'un centimètre au plus et très rapprochées ; je n'ai pas cherché à apprécier la profondeur, mais ces blessures très étroites saignaient abondamment (2). »

Les Poissons qui ont attaqué ainsi le Dr Jobert appartiennent suivant moi, incontestablement au genre Vandellie, peut-être même à l'espèce *Vandellia Wieneri* (3). Si l'on se reporte à la description donnée plus haut de la bouche et de l'appareil operculaire, on s'expliquera ainsi facilement le fonctionnement de ces divers organes ; on comprendra aisément que la demi-couronne de dents en crochet placée en avant de la bouche, dents *susceptibles d'un certain degré d'érection et au nombre de 5 à 6 principales* produit ces *scarifications parallèles, régulières et en groupe de 5 à 6 lignes*. Les épines interoperculaires du dessous de la tête, aussi un peu érectiles, peuvent

(1) *Loc. cit.*, p. 496.

(2) Le Dr Jobert ne put prendre sur le fait les Candirus. Quelque temps après, un Indien lui remit comme étant de vrais Candirus des petits Poissons capturés à l'aide de chair de Tortue en guise d'appâts. Ces spécimens qui sont conservés au Muséum de Paris sont des *Stegophilus insidiosus* Reinhardt, genre très voisin des Vandellies, à épines, operculaires et interoperculaires, mais *sans crochets à la mâchoire supérieure*. On comprend très bien que l'Indien n'ait pas su distinguer deux formes presque identiques extérieurement et qui ne diffèrent guère que par la dentition.

(3) Il peut s'agir également du *Vandellia Plazai* Castelnau, qui atteint aussi une taille assez grande (longueur du spécimen dû à Jobert : 12 centimètres).

également, dans une certaine mesure, déchirer les téguments, mais elles doivent surtout servir à la fixation. Quant aux épines operculaires du dessus de la tête, elles me semblent plutôt, étant donnée la direction de leur pointe, destinées à faciliter la progression de l'animal et à empêcher tout recul lorsqu'il s'engage dans un conduit étroit, par exemple entre les lamelles branchiales des Platystomes.

Sans vouloir trancher la question de la pénétration des Vandellies dans l'urèthre, pour laquelle je ne puis apporter des documents nouveaux, il me paraît tout au moins démontré en rapprochant les détails anatomiques que j'ai pu constater sur les *Vandellia Wieneri*, des observations faites sur lui-même au Brésil par le Dr Jobert, que les Candirus, véritables Poissons-sangsues, ne sont pas, ainsi que le pensait Günther, de simples commensaux des grands Siluridés sur lesquels ils vivent habituellement; leurs dents et leurs épines operculaires et interoperculaires leur permettent non seulement de se fixer sur les branchies de leur hôte, mais aussi de faire des blessures amenant un écoulement de sang abondant qu'une disposition spéciale leur permet d'ingurgiter. Enfin à l'état libre, comme l'a constaté le Dr Jobert, les Vandellies ne craignent pas de s'attaquer à l'Homme, dont elles percent les téguments, ce qu'elles font aussi certainement sur certains Mammifères domestiques. Il y a lieu en terminant de noter que les dents volumineuses peu nombreuses, en forme de crochets acérés de la mâchoire supérieure, sont particulières au genre *Vandellia*, qu'elles sont absentes dans les genres voisins *Stegophilus* Reinhardt et *Acanthopoma* Lütken, où elles sont remplacées par une bande de très nombreuses petites dents acérées.

Les Vandellies représentent donc, chez les Siluridés, le dernier terme de la spécialisation en vue d'un parasitisme des plus caractérisés.

ÉTUDE D'UNE COLLECTION D'OISEAUX PROVENANT DES HAUTS PLATEAUX DE LA BOLIVIE ET DU PÉROU MÉRIDIONAL

Par A. MENEGAUX.

Cette collection a été rapportée par la mission de Créqui-Montfort et le Sénéchal de la Grange. Depuis d'Orbigny et de Castelnau et Deville, le Muséum n'avait rien reçu de cette région, c'est dire l'intérêt que présentait la collection. J'ai décrit précédemment *Agriornis andecola paziae* et *Brachyspiza capensis pulacayensis* (*Bull. Mus.*, 1908, p. 340), je décris aujourd'hui *Pseudochloris olivascens berlepschi* et *Anas cristata alticola*. On trouve un certain nombre de raretés dans cette collection, entre autres *Fulica cornuta* Bp., *Diuca behni* Rchw., etc., et divers spécimens qui n'existaient pas dans nos collections nationales.

Grâce à l'amabilité de M. le professeur Reichenow, j'ai pu aussi indiquer les spécimens collectés par Stübel dans cette région en 1876, spécimens dont la plupart sont conservés au musée de Berlin.

Psittacidés.

1. Bolborhynchus orbygnesius (Souancé).

Myopsitta orb. Souancé, *Rev. et Mag. Zool.* (1856), (descriptio manca) et *Icon. Perr.*, Pl. 24, f. 1 (1857).

Un ♂, sans renseignements; œil jaune, pourtour foncé.

Le Muséum ne possédait que les deux types de l'espèce collectés en Bolivie par d'Orbigny en 1834.

Stübel en a rapporté deux spécimens de Yambo Pata sur le bord occidental du lac Titicaca, 3.800 mètres d'altitude, décembre 1876 (n° 97). « Le bec de l'un d'eux était gris noirâtre à la base, celui de l'autre entièrement jaune. »

2. Conurus acuticaudatus G. R. Gray.

C. acut. G. R. Gray, *Gen. Birds*, II, p. 413, n° 1 (partim 1845).

Trois spécimens; œil jaune avec bordure brune; en espagnol *Lorito*. Nom quichua, *Kaitchichi*.

Vulturidés.

3. Sarcorhamphus gryphus (L.).

Vultur gr. Linné, *Syst. nat.* I, p. 121.

Un ♂ des environs de Yura, à 5.000 mètres d'altitude, tué le 18 juin 1903 sur le Cerro Tumula, envergure 3m,40.

Cette espèce, en effet, ne vit que sur les parties élevées des Andes.

Falconidés.

4. Ibycter megalopterus (Meyen.).

Aquila meg. Meyen, *Beih.*, p. 64 pl. 7 (1834).

Un ♂ adulte; tête rouge orangé, plus rouge près du bec, pattes orangé clair, alto de la Paz, du 8 août 1903. Nom ind., *Gallinazo.*

Un jeune bien reconnaissable à sa couleur brune; des environs de Yura; racine du bec jaune, pattes grises, du 19 juin 1903.

Un troisième spécimen moins adulte que le premier, car les flancs sont tachetés ainsi que le côté externe des cuisses.

Stübel en a rapporté un spécimen de Coniri, 4.100 mètres d'altitude, octobre à novembre 1876. Stolzmann l'avait déjà signalé à Cutervo à 3.000 mètres d'altitude. Le Muséum possède les trois types que d'Orbigny a décrits sous le nom de *Phalcobaenus montanus.*

5. Falco fusco-cœrulescens Vieill.

F. fusco-c. Vieillot, *N. Dict. Hist. nat.*, XI, p. 90 (1817).

Deux spécimens; œil jaune citron vif, cire jaune, pattes jaunes; (Taczanowski dit iris brun foncé). En espagnol et quichua: *Alcon;* en aymara: *Mamani.*

Les collections possèdent quatre spécimens de cette espèce dont deux proviennent de Bolivie et ont été rapportés par d'Orbigny; les deux autres (dont le type de *F. femoralis* Temm.) ont été collectés par Saint-Hilaire au Brésil.

6. Buteo erythronotus King.

Haliætus er. King, *Zool. Journ.*, III p. 424 (1827).

Un ♂ et deux ♀ ad., sans renseignements. Œil noir et jaune, en espagnol, *Bouho;* nom quichua, *Jouko ;* nom aymara, *Pejpéré.*

Stübel, un spécimen de Cepita, 3.800 mètres, décembre 1876 (n° 96).

Bubonidés.

7. Speotyto cunicularia juninensis Berl. et Stolz.

Strix cun. Molina, *Stor. Chili*, p. 343 (1776).
Sp. cun. j. v. Berlepsch et Stolzmann, *P. Z. S.* (1902), vol. II, p. 41.

Cinq spécimens sans renseignements de localité. Ce sont des oiseaux de montagne, car ils diffèrent de ceux des parties basses par une taille un peu plus grande. De plus, le brun du corps est roussâtre, le jugulum est d'un blanc pur, ainsi que les anales et les sous-caudales. Les sous-alaires sont blanches, les rectrices ont une bordure blanche. Les tarses sont couverts de plumes d'un blanc très pur jusqu'à la base des doigts; les plumes recouvrent les côtés et sont allongées en arrière de façon à cacher le tarse tout entier en ne laissant à nu que le talon. Sur les doigts, de longues soies sont implantées jusqu'à la base des griffes.

Dimensions : ailes, 195 millimètres ; queue, 100; tarses, 44 ; bec, 20.

Cette grande forme a déjà été signalée par Jelski aux environs du lac Junin ; dans la région des *punas* par Taczanowski et au lac Junin (Ingapicca) par Berlepsch et Stolzmann.

Stübel a rapporté de Sicasica (Bolivie), 4.000 mètres, et de Tacora 4.200 mètres, en octobre-novembre 1876, deux spécimens qui appartiennent à cette forme.

Picidés.

8. Geocolaptes rupicola (d'Orb.).

Col. rup. d'Orbigny, *Voy. Amér. mérid.*, IV, p. 377, Pl. 62. *fig.* 1 (juv.) (1835-1844).

a) Un spécimen de Huancani, lac Titicaca, du 5 juin 1905. Nom local, *Llaqua-llaqua ;* nom quichua, *Yaca-yaca*. Œil jaune, pupille foncée.

b, *c*, *d*) Trois spécimens, sans renseignements.

a) Ce spécimen a la nuque et les moustaches dépourvues de rouge. Les parties inférieures sont d'un chamois très pâle. Les taches du jugulum sont plutôt ovales, allongées dans le sens transversal, que triangulaires. Aile, 165 ; queue, 119 ; bec, 51.

b) A des moustaches sans rouge, tandis que *c* et *d* ont du rouge sur leurs bords et l'un d'eux porte des taches noires sur les flancs. Aile, 162 et 168; queue, 110 et 115; bec, 50.

Le type de l'espèce conservé, aux Galeries, est un jeune ♂ provenant

de Sicasica (n° 609). Il a le front et la nuque foncés. Il porte des taches jugulaires ovales, allongées et quelques taches sur les flancs, mais beaucoup moins que ne le représente la figure de d'Orbigny. Ce voyageur a en outre rapporté trois jeunes femelles qui peuvent être regardées comme des cotypes. L'une d'elles (n° 607) ne porte pas de tâches aux flancs, tandis qu'une autre (n° 608) en montre encore quelques-unes. Ces deux spécimens n'ont pas de rouge à la nuque, de même qu'un quatrième spécimen de Bolivie provenant du même voyage. Ces trois oiseaux ont un peu de rouge aux moustaches, surtout à l'extrémité et sur les bords. Le bas du dos et le bas-ventre sont presque blancs. Aile, 170 ; queue, 110 ; bec, 48.

J'ai trouvé, dans la collection non montée, un spécimen venant de Bolivie, « département de l'Illimani », 1852 (Collecteur ?), qui ne présente aucune tache sur les flancs, mais du rouge à la nuque et aux moustaches. Le bec est aussi un peu plus long et mesure 55 millimètres. Le bas-ventre et le bas du dos sont chamois assez clair.

Enfin une ♀ de *rupicola* rapportée du *Chili* par Gay en mai 1843, a toute la tête un peu plus foncée, la nuque rouge, mais pas les moustaches, et elle ne porte pas de taches sur les flancs.

Les taches jugulaires sont petites, en triangle et allongées transversalement. La taille est un peu plus forte : aile, 175 ; queue, 125 ; bec, 48. La détermination étant exacte, la localité indiquée par Gay serait-elle fausse ? Une ♀ de « Ccachupata (Bolivie) » a le bas de la nuque qui est rouge, tandis que les moustaches sont noires ; les taches pectorales sont plus larges et échancrées au milieu de la base. L'abdomen et le bas-ventre sont chamois assez foncé.

Stübel a rapporté quatre spécimens de Bolivie : deux ♂ de Tamarapè et deux ♀ dont une de Sicasica. Les deux ♂ et une ♀ ont du rouge à la nuque, l'autre femelle n'en a pas. La longueur du bec oscille entre 53 et 55 millimètres.

Il lui semblait que les animaux à bec long sont des adultes, mais ils ne sont pas encore vieux, puisqu'ils n'ont pas encore acquis toute leur couleur et leur bec n'est pas encore usé. D'après lui les oiseaux qui ont du rouge sont relativement jeunes, car cette couleur n'est représentée que par très peu de plumes, quelques-unes seulement chez la femelle.

Plus les oiseaux vieillissent, plus le rouge se développe et plus court devient le bec.

Cabanis pensait (*J. f. O.*, 1883, p. 97 et 98) qu'on pouvait caractériser la forme *G. puna* par la présence de rouge à la nuque dans les deux sexes et *G. rupicola* typique par l'absence de cette couleur.

Cette affirmation est beaucoup trop absolue. Malherbe (*Mon. Picidés*, 1862) n'admet pas *puna* comme espèce autonome et il avait montré que les *rupicola* adultes, bien en couleur, possèdent du rouge à la nuque dans les deux sexes.

Au Muséum Berlepsch, j'ai examiné de belles séries des deux formes. En général, les oiseaux de la Bolivie n'ont point de rouge à la nuque; ainsi, sur 12 ♂, il y en a 2 qui ont beaucoup de rouge; sur 6, il est plus ou moins visible ; sur 4, il n'y en a pas. Au contraire, chez les oiseaux de Marcapata (Pérou), les deux sexes, sauf une femelle, avaient invariablement du rouge à la nuque.

En outre il ressort de cette étude que les Oiseaux de Bolivie ont *généralement* les parties inférieures plus pâles que les Oiseaux de Marcapata. La forme des taches pectorales varie beaucoup dans les Oiseaux de Bolivie; elles paraissent être petites et plus arrondies que dans la forme du Pérou. Mais la présence ou l'absence de taches noires aux flancs ne peut constituer un caractère différentiel. Pourtant il semble qu'on puisse être autorisé à admettre deux formes, l'une de Bolivie qui est *G. rupicola rupicola* (d'Orb.), et l'autre du Pérou qui prend le nom de *C. rupicola puna* (Tschudi). La première est celle que d'Orbigny a signalée sur les hauts plateaux appelés *punas*, des districts de la Paz, de Chuquisaca, de Potosi et de Cochabamba.

Ictéridés.

9. Agelaeus thilius chrysocarpus (Vig.).

Turdus thilius Molina, *Hist. Nat. Chili*, p. 345 (1782).
Xantornus ch. Vigors, *P. Z. S.*, p. 3 (1832).

Un ♂ de Chililaya sur le lac Titicaca. Le bord des ailes est jaune doré comme les petites couvertures; les sous-caudales sont finement bordées de blanc. Cette forme plus spéciale à l'est des Andes paraît se distinguer fort peu de la forme typique. La taille est un peu plus grande. Longueur totale, 195 millimètres; aile, 98; queue, 80; bec, 23; tarse, 24.

M. le comte de Berlepsch n'a pas trouvé de différence entre les oiseaux du lac Titicaca et ceux de la Bolivie (*Ornis.*, 1906, p. 103). La forme argentinienne a une taille un peu plus faible que celle des oiseaux du Chili. Il faudra peut-être lui donner un nom spécial.

Trochilidés.

10. Patagona gigas (Vieill.).

Trochilus g. Vieillot, *Gal. Ois.*, I, p. 296 (Pl. CLXXX).

Un spécimen sans renseignements. Signalé à Cochabamba, la Paz, Chuquisaca par d'Orbigny.

11. Oreotrochilus estellae (d'Orb. et Lafr.).

Trochilus est. d'Orbigny et Lafresnaye, *Mag. zool.*, vol. VIII, cl. II., p. 52 (1838).

Un ♂ tué à Almona. Récolté à la Paz et à Potosi par d'Orbigny.

Mimidés.

12. Mimus dorsalis (Lafr. et d'Orb.).

Orpheus d. Lafresnaye et d'Orbigny, *Mag. Zool.*, p. 18 (1837).

Un spécimen sans indication précise de localité.

Cette espèce est très voisine de *M. triurus* (Vieill.). On la reconnaît facilement à ce que les secondaires médianes ne sont marquées de blanc qu'à l'extérieur et à l'extrémité, tandis que chez *triurus* elles sont blanches, sauf une tache noire vers la pointe.

D'ailleurs sa taille est aussi plus forte que celle de l'oiseau de Vieillot. Longueur totale, 250 millimètres; aile, 112; queue, 111; culmen, 21; tarse, 32.

Déjà signalé à Cochabamba par d'Orbigny.

Fringillidés.

13. Diuca behni Rchw.

D. b. Reichenow, *Ornith. Monatsb.* (1907), p. 201.

Un ♂ des environs de Pulacayo, 4.300 mètres, 27 mai 1903. Nom indien, *Pajaro del Spirito.*

Une ♀ (?).

Les flancs et les sous-caudales sont légèrement teintés d'isabelle. Les dernières secondaires sont bordées de châtain, et les rectrices sont finement bordées de grisâtre.

Dimensions respectives : aile, 102 et 101 ; queue, 65 et 66 ; bec, 13 et 12 ; tarse, 24 et 24. Cette espèce est très voisine de *D. speculifera* du Pérou et de la Bolivie.

Le type de l'espèce a été rapporté jadis par Behn de Potosi et se trouve au Musée de Berlin. On ne connaît donc que trois spécimens de cette intéressante espèce.

14. Phrygilus plebeius (Cab.).

Ph. pl. Cabanis, *Arch. Naturg.*, X, p. 290 (1844).

Un ♂; une ♀ de Chepepe Pazña, du 5 juin 1903. Cette espèce est propre à la région de la Sierra.

Stübel, un spécimen (n° 46) des environs de la Paz, de 3.500 à 4.000 mètres, décembre 1876.

15. Brachyspiza capensis pulacayensis Menegx.

Fringilla capensis P. L. S. Müller, *Natursyst. Supp.* (1776), p. 165 (ex Daubenton, pl. 386, *fig.* 2). Voir Hellmayr, *Revision des Spix'schen Typen*, *Bayer. Ak. Wisseninch.* (1906, Cayenne).

Br. c. pul. Menegaux, *Bull. Mus.*, p. 341 (1908).

Zonotrichia pileata auct.

a) Un spécimen de Pulacayo, 4.200 mètres d'altitude.

b) Un spécimen des Pampas de Pazña du 12 juin 1903.

(Types de la sous-espèce.)

Ces deux spécimens appartiennent à une forme des hautes montagnes qui se différencie de celles des pays voisins par sa taille plus grande, par un large demi-collier roux cannelle qui atteint 11 millimètres de largeur au milieu et sur les côtés. Les deux grandes taches latérales noires du jugulum sont assez nettement séparées. Les rémiges secondaires portent une large bordure externe roux cannelle de 3 à 4 millimètres; la bordure du côté interne est moins vive de couleurs. Les grandes couvertures alaires sont aussi très largement bordées de roux; la pointe seule de cette bordure est d'un blanc plus ou moins pur. Les couvertures moyennes sont noirâtres et largement bordées de blanc pur, 3 à 4 millimètres, de même que les rectrices primaires. Les rectrices sont bordées d'un gris roussâtre assez net.

Le milieu de la tête est parcouru par une ligne cendré bleuâtre qui part du front où elle est étroite et va en s'élargissant jusqu'au collier roux cannelle. Le trait supra-sourcilier se prolonge en arrière de l'œil et devient cendré bleuâtre.

Deux spécimens rapportés de Bolivie par Castelnau et Deville en 1846 et étiquetés *Zonotrichia matutina* G.-R. Gray et Z. *pileata* Bodd. se rapprochent de cette forme par la taille et les autres caractères, mais le demi-collier est moins large, pourtant plus large que sur les autres formes voisines.

Dimensions en millimètres des spécimens étudiés :

a) Longueur totale, 165; aile, 82; queue, 78; bec, 12,5; tarse, 22;
b) Longueur totale, 163; aile, 88; queue, 74; bec, 11; tarse, 21;
c) Longueur totale, 155; aile, 75; queue. 73; bec, 12; tarse, 12, (de Bolivie, par de Castelnau et Deville).

Les nombreux spécimens que j'ai examinés sont tous de taille plus petite, et ils ont des dimensions très voisines de celles indiquées au *Cat. Birds. Brit. Mus.*, soit : 152, 67, 62, 11, 20.

Cette forme des hautes montagnes est donc plus grande que toutes celles signalées dans les pays voisins, en sorte que l'énumération des diverses formes faites par Ridgway [in *Auk*, vol. XV, p. 321 (1898)] doit être complétée de la façon suivante :

1. *Brachyspiza capensis* (Muller), du Vénézuéla au Paraguay et à l'Argentine ;
2. *Brachyspiza capensis insularis* Ridgway, Curaçao ;
3. *Brachyspiza capensis peruviana* (Lesson), du Sud du Mexique au Pérou ;
4. *Brachyspiza capensis chilensis* (Meyen), Chili;
5. *Brachyspiza capensis canicapilla* (Gould), Sud de la Patagonie;
6. *Brachyspiza capensis pulacayensis* Menegx, Pulacayo, Bolivie.

La forme *Zonotrichia pileata* a déjà été signalée en Bolivie par d'Orbigny; à Sorata, Nairapi, dans la province des Yungas, par Sclater et Salvin.

16. Pseudochloris uropygialis (Lafr. et d'Orb.).

Emberiza ur. Lafresnaye et d'Orbigny, *Mag. Zool.* (1837), p. 75.

Un adulte et un jeune. Ce dernier se distingue de l'adulte par une teinte plus rousse de toutes les parties supérieures et par des bandes brunes plus foncées sur le dos.

Stübel, un spécimen de Corocoro, 4.100 mètres d'altitude, octobre novembre 1876 (n° 36).

17. Pseudochloris olivascens Berlepschi n. subsp.

Emberiza olivascens Lafresnaye et d'Orbigny, *Syn. Avium, in Mag. Zool.* (1837) p. 75.

a) Un ♂ des environs de Pulacayo, 4.300 mètres d'altitude, tué le 27 mai 1903, en plumage d'hiver. Les plumes du bas du dos sont jaune vert à la pointe; le manteau a beaucoup moins d'olivâtre et rap-

pelle celui du type de l'espèce. Les rémiges ont une bordure très pâle tirant sur le blanchâtre. Nom indigène, *Amarillito*.

b) Un jeune ♂ dont le sinciput n'est pas maculé de noirâtre et dont le jaune des parties inférieures se rapproche déjà de celui du mâle adulte.

c) Une jeune ♀, environ de Pulacayo, 5.400 mètres, tuée le 27 mai 1903. Nom indigène, *Pajajo de Viento*. La tête est encore mouchetée de noirâtre, le manteau est gris roussâtre et l'abdomen, comme les sous-caudales, est à peine teinté de jaunâtre.

d) Un juv. ♀ de Pulacayo, à peine lavé de jaunâtre en dessous ; le manteau est noirâtre ainsi que les bordures des rémiges.

J'ai comparé ces spécimens au type de l'espèce rapporté de la Paz (Bolivie) par d'Orbigny en 1834 (c'est malheureusement une femelle) et aux spécimens de la belle collection du comte de Berlepsch, et qui viennent de la Paz, ainsi qu'à ceux provenant du Pérou (Cuzco) et qui sont désignés sous le nom de *Ps. ol. chloris* (Cab.).

Les quatre spécimens rapportés par la mission de Créqui-Montfort ont tous le bec plus court, le corps plus petit ainsi que la queue. Comme ces caractères paraissent constants chez les Oiseaux de Pulacayo, j'en fais les types de la sous-espèce *Ps. ol. berlepschi*, que je dédie à mon ami le savant ornithologiste comte de Berlepsch.

Dimensions des spécimens examinés :

	a ♂	*b*	*c*	*d*	TYPE DE D'ORBIGNY
Longueur totale .	140	130	140	135	160 (1)
Aile	90	84	85	83	83
Queue	63	56	58	57	60
Bec	10	10,3	10,9	10,1	13
Tarse	20	19	19	19	19

L'épaisseur du bec, au niveau du gonys, allait de 6 1/3 à 7 millimètres ; chez le type de d'Orbigny, elle est de 6 2/3.

Chez tous les spécimens de la Paz que j'ai examinés au Muséum Berlepsch, le bec atteignait toujours au moins 12 millimètres et la taille était un peu plus forte.

L'espèce *Pseudochloris olivascens* présente donc trois formes : la forme typique de la Paz, *Ps. ol. olivascens* (Lafr. et d'Orb.) ; celle du Pérou (Cuzco), *Ps. ol. chloris*. (Cab.), et celle de Pulacayo, *Ps. ol. berlepschi* Menegx.

(1) Ce chiffre est indiqué par d'Orbigny pour la femelle.

Tyrannidés.

18. Lessonia nigra oreas (Sclater et Salv.).

Alauda nigra Boddaert, *Tabl. Pl. enl.*, p. 46.
Centrites oreas Sclater et Salvin, *P. Z. S.* (1869), p. 154.

Un ♂ de Pulacayo, 4.200 mètres, commun près du lac Titicaca. Stübel, un spécimen de Tacora, 4.200 mètres d'altitude, octobre-novembre 1876 (n° 2).

19. Pitangus sulphuratus bolivianus (Lafr.).

Lanius sulph., Linné, *Syst. Nat.*, I, p. 137 (1766, Cayenne).
Saurophagus bol. Lafresnaye, *Rev. Mag. zool.*, p. 465 (1852 Chuquisaca).
Pit. bellicosus auct.

Deux spécimens. Cette forme se distingue de la forme typique de Cayenne par une taille beaucoup plus forte, et par la couleur des parties inférieures qui est d'un jaune très pâle à la poitrine, et qui va s'accentuant jusqu'à la région anale. Les rémiges primaires sont nettement bordées de brun roussâtre, ainsi que les rectrices.

Leurs dimensions concordent avec celles indiquées par Lafresnaye : longueur totale, 240 et 260 ; aile, 130 et 128 ; queue, 102 et 100 ; bec, 31 et 30; elles sont supérieures à celles indiquées dans le *Cat. B. Brit. Mus.*, vol. XIV, p. 177.

D'Orbigny avait signalé cette forme en Bolivie dans les provinces de Chiquitos, Cochabamba et Chuquisaca.

20. Agriornis andecola pazñae Menegx.

Pepoaza and. d'Orbigny, *Voy. Ois.*, p. 350 (1844, Andes de Bolivie).
Ag. and. pazñae Menegaux, *Bull. Mus.*, p. 6 (1909, Pazña).

Un spécimen. Chemin de Pazña à Urmiri (près du lac Poopo, 3.694 mètres d'altitude), 14 juin 1903 (type de la sous-espèce).

Cette forme est caractérisée à première vue par la couleur du corps, en dessus et en dessous, et par celle des ailes et de la queue, beaucoup moins foncée que celle de d'*A. andecola andecola* (d'Orb.,) ainsi que par les parties blanches qui sont d'une couleur beaucoup plus pure.

La tête et la nuque sont uniformes, mais un peu plus foncées que le reste des parties supérieures qui sont d'un brun blanchâtre, plus pâle que chez l'espèce type. La gorge et le menton sont d'un blanc pur, limités par des bords plus foncés ; cette région porte en son milieu 4 ou 5 plumes qui forment une sorte de strie noirâtre discon-

tinue. Quelques stries noirâtres indécises s'irradient sur les côtés du cou. Le trait sourcilier part de la base du bec et dépasse l'œil, il est blanchâtre, comme le pourtour de l'œil. Les lores sont d'un noirâtre moins foncé que sur le type de l'espèce.

Le jugulum et la poitrine antérieure sont d'un gris fauve très clair, ainsi que les sous-alaires ; le bas-ventre et les sous-caudales sont isabelle clair, les flancs et les cuisses sont d'une couleur brunâtre très pâle. Chez le type de l'espèce, toutes ces parties sont plus foncées ; le milieu de l'abdomen est plus jaunâtre.

Les rémiges et les rectrices sont aussi moins foncées. Les rémiges secondaires et tertiaires portent une large bordure blanche. Le bord alaire est blanc, comme sur le type de l'espèce. La queue est formée de douze rectrices de couleur uniforme et finement bordée de roussâtre. Seule la rectrice la plus externe de chaque côté (la 6e) possède des barbes externes d'un blanc pur de la base jusqu'à la pointe. L'extrême pointe des rectrices est plus pâle.

Comme on le voit, cette forme diffère donc de *A. montana* (d'Orb. et Lafr.) des Andes de Bolivie et de *A. maritima* (d'Orb. et Lafr.) qui ont la moitié apicale des rectrices externes blanche ; du groupe de *A. pollens* Scl. *A. solitaria* Scl., de l'Equateur et de *A. insolens* Scl. et Salv. de Bolivie, qui ont les rectrices externes tout entières blanches. Elle fait partie du groupe d'*A. livida* (Kittl.) du Chili, d'*A. striata* Gould de l'Argentine et de la Patagonie et d'*A. andecola* (d'Orb.) de Bolivie. Par sa couleur, ses divers caractères et son habitat, c'est d'*A. andecola* qu'elle se rapproche le plus.

Dendrocolaptidés.

21. Geositta cunicularia frobeni (Phil. et Landb.)

Certhilauda frobeni Philippi et Landbeck, *Arch. Naturg.*, 31, 1, p. 62 (1865) (Putré, Pérou).

Trois spécimens, dont l'un de Pachuras Pazña, du 5 juin 1903. Cette forme est très voisine de *G. c. cunicularia* (Vieill.). La poitrine est tachetée de brunâtre sur les spécimens de Pachuras, et chez les deux autres toutes les parties inférieures sont d'un blanc pur. Les sous-caudales ne sont blanches que sur le spécimen de Pachuras.

Rapporté de Cochabamba (Bolivie) en 1834 par d'Orbigny (Menegaux et Hellmayr, *Bull. Soc. Hist. nat.* d'Autun, 1906, p. 44) et par Stübel de Tacora, 4.200 mètres : un spécimen (n° 4), octobre-novembre 1876.

22. Furnarius rufus ? (Gm.).

Quatre nids de Fournier provenant de Salta (Nord de l'Argentine) avec des œufs (Voir *Bull. Mus.*, 1909, n° 1, p. 6 à 11, 1 pl. et 1 fig.). Nom espagnol, *Hornero* (boulanger).

Ces quatre nids étaient placés sur des branches de 5 à 6 centimètres de diamètre ; deux sur *Populus canadensis*. Ils sont formés de boulettes de terre glaise agglomérées et pétries par le couple, et ils ressemblent à un petit four de campagne dont l'orifice aurait 5 à 6 centimètres de large sur 7 de hauteur. Les deux compartiments intérieurs, formés par la cloison, avaient, le couloir 3 centimètres de large, et la chambre d'incubation 13 sur 15. Chacun de ces nids pèse au moins 3 kilogrammes, et ils ont 25 à 28 de longueur, 20 centimètres de hauteur et 16 centimètres d'épaisseur totale. Les parois ont 3 centimètres d'épaisseur ; la cloison de refend est plus mince. Les œufs sont blancs, brillants, comme vernis, et ont 27,5 sur 21 ; l'un de ces nids, sans cloison, renfermait 4 œufs plus petits, mouchetés, rappelant ceux des hirondelles de ce pays, 22,3 sur 16,8.

23. Leptastenura aegithaloïdes aegithaloïdes (Kittl.).

Synallaxis æg. Kittlitz, *Vög. Chil.*, p. 15, pl. 7.

Un spécimen de Pulacayo, 4.200 mètres d'altitude.

Signalé par d'Orbigny à Cobija, aux environs de la Paz.

24. Siptornis modesta sajamae (Berlp.).

S. mod. saj. Berlepsch, *J. f. O.* (1901), p. 94 (Esperanza et Sajama).

Un ♂, environs de Pulacayo, 4.300 mètres, 29 mai 1903.

Un ♀ de Pulacayo, 4.200 mètres. Nom local, *Picincare*.

Nouvelle sous-espèce pour les collections.

Stübel a rapporté de Tamarape une forme qu'on a identifiée avec *S. modesta* Eyt., 4.200 mètres d'altitude, octobre-novembre 1876.

Péristéridés.

25. Metropelia aymara (d'Orb.).

Columba ay. d'Orbigny, *Syn. Av.*, in *Mag. de Zool.*, 1837.

Un ♂, près Pulacayo, 4.200 mètres. Nom ind., *Palombita*.

Une ♁ juv., Panya arenal, près Pulacayo, 4.000 mètres d'altitude, 28 mai 1903. Nom local, *Palombita*.

Ce dernier spécimen est en voie de prendre le plumage de l'adulte, les rémiges secondaires, les couvertures et les plumes du dos sont toutes finement bordées de blanc, une tache dorée est déjà dessinée d'un seul côté et le jugulum est foncé.

Cette colombe à miroir d'or a été récoltée par d'Orbigny à Tacora (deux spécimens), d'après le registre d'entrée du laboratoire, tandis que le type de l'espèce monté et exposé aux galeries porte par erreur Cochabamba. Le Muséum ne possédait que ces deux exemplaires.

Stübel a rapporté de Tamarape, 4.200 mètres, trois spécimens de cette espèce, octobre-novembre 1876 (nos 14, 15, 16).

Tinamidés.

26. Nothoprocta ornata (G. R. Gray).

Rhynchotus orn. Gray, *List gallinae Brit. Mus.*, p. 107 (1867, Bolivie).

Un spécimen sans renseignements.

Le Muséum possède trois spécimens de cette espèce, un adulte et deux poussins rapportés par d'Orbigny de la Paz en 1834. Ce nouveau spécimen se distingue de celui de d'Orbigny par un bec plus long et plus large à la base, par des stries pectorales mieux marquées, par un abdomen plus pâle au milieu et par un croupion et un bas du dos plus clair, car les bandes transversales sur les plumes sont d'une teinte beaucoup plus claire. La tête est aussi moins foncée, le spécimen se rapproche donc de la forme *rostrata* décrite par Berlepsch (*Congrès ornith.*, 1905, p. 371).

27. Tinamotis pentlandi Vig.

T. pentl. Vigors, *P. Z. S.* (1836), p. 19 (Andes).

Un spécimen. Le Muséum n'en possède que deux échantillons rapportés de Bolivie par d'Orbigny en 1834. L'un d'eux provient de la Paz.

Thinocorythidés.

28. Attagis gayi Less.

Att. g. Lesson, *Cent. Zool.*, p. 135, Pl. 47 (1830, Chili).

Deux ♂ sans renseignements.

Un ♂, le dessous du corps est d'un roux plus intense et les grandes tectrices de l'aile sont plus largement bordées de roussâtre.

Le Muséum ne possède que deux spécimens du Chili de cette inté-

ressante espèce : une ♂ provenant de la collection Bonaparte et le type de l'espèce (n° 12208) rapporté par Gay (1831).

29. Thinocorus orbignyanus Geoff. et Less.

Tinochorus orb. Is. Geoffroy et Lesson, *Cent. Zool.*, p. 137, Pl. 48, 49 (1830).

Un spécimen.

Le Muséum possède le type de l'espèce (♂ n° 12213), rapporté du Chili par Gay (1831), et les deux spécimens collectés en Bolivie par d'Orbigny (1834), ainsi qu'une ♂ rapportée par Gay du Chili en 1836 et un autre de la Terre de Feu.

Cracidés.

30. Penelope obscura bridgesi Gray.

P. obscura Temminck, *Pig. et Gall.*, III, p. 68, 693 (1815).
P. bridgesi Gray, *P. Z. S.* (1860), p. 270 (Bolivie).

Deux ♂ en beau plumage, tués près de Jujuy (Argentine).

Dimensions	Spécimens étudiés	Cat. B. Brit. Mus.
Longueur totale	27 cm.	24
Aile	33	27,5
Queue	34	28
Tarse	8	8
Doigt médian + griffe	7,5	7,5

Comme on le voit, les dimensions de l'aile et de la queue sont un peu supérieures à celles indiquées par O. Grant, in *Cat. B. Brit. Mus.* (vol. XXII).

Cette espèce comprend trois formes :

1° *P. obscura obscura* Tem. du Paraguay et du Chaco argentin ;

2° *P. obs. bridgesi* Gray du Tucuman, de Salta et de la Bolivie ;

3° *P. obs. nigricapilla* Gray, forme de Saint-Paul, du Brésil oriental avec les bordures blanches larges.

Ibidés.

31. Falcinellus rigwayi Allen.

F. ridg. Allen, *Bull. Mus. Comp. Zool.*, III, p. 335 (1876, lac Titicaca).

Quatre spécimens jeunes tués à Volcan (Argentine).

Ils ont tous la tête, et le cou tout entier, striés de blanc, ainsi que la poitrine et l'abdomen tachetés de rouge.

Stübel, dans son voyage de la Paz à Puna par Tiahuanaco, en a rapporté quatre du lac Titicaca, décembre 1876 (nos 97-100).

Charadridés.

32. Oreophilus ruficollis (Wagl.).

Charadius ruf. Wagler, *Isis* (1829), p. 653 (ex Licht. in *Museo Berol.*).

Quatre spécimens sans localité précise.

Rare, mais caractéristique des hautes montagnes de ces régions.

33. Ptiloscelis resplendens (Tsch.).

Charadrius resp. Tschudi, *Arch. f. Naturg.* (1843), p. 388; Id. et Cabanis, *Fauna peruana, Aves* (1845-1846), p. 49 et 295.

Un ♂ de Huancani, 5 juin 1903. Nom indigène, *Leque-leque*.

Un ♂ des environs de Pazña Bastide, 17 juin 1903. Yeux et pattes roses.

Cette espèce, décrite en 1843, a déjà été rapportée par d'Orbigny en 1834. Les trois spécimens de ce Pluvier à plastron gris dont l'un est monté provenaient de la Paz. Castelnau, en 1845, a récolté à Potosi deux mâles ayant les « yeux orangé clair » et une femelle. Un deuxième spécimen monté aux Galeries provient de l'Equateur par Bouvier.

Cette intéressante espèce ne se trouve qu'à l'ouest de l'Amérique méridionale, de l'Equateur à la province de Tarapaca. En effet, Stübel en a rapporté un spécimen de Tamarape, 4.200 mètres, octobre-novembre 1876 (n° 97).

34. Totanus flavipes (Gm.).

Scolopax fl. Gmelin, *Syst. nat.*, I, p. 659 (1788).

Un ♂ en plumage de noces, du lac Poopo, 3 juin 1903 : bec noir et pattes jaunes. Nom indien, *Chorlo*.

Le Muséum n'en possède par de spécimens de cette région.

Phalacrocoracidés.

35. Phalacrocorax brasilianus (Gm.).

Procellaria br. Gmelin, *Syst. nat.*, I, p. 564 (1788).

Un ♂ juv. avec plumage brun fuligineux, 15 juillet 1903.

Le Muséum possède encore un des types de Lesson, *P. mystacalis* (n° 14254), espèce qui a été identifiée avec *Pl. brasilianus* (Gm.); c'est un ♂ rapporté du Brésil par A. Saint-Hilaire en 1820. Il possède en outre deux jeunes ♂ rapportés par le même voyageur.

Rallidés.

36. Fulica cornuta Bp.

Ful. c. Bonaparte, *Comptes rendus* (1853), t. XXXVIII, p. 925.

Un spécimen du lac Poopo (Bolivie), Tahua, 8 juin 1903. C'est le deuxième exemplaire de Bolivie de cette remarquable espèce que reçoit le Muséum. Il est plus jeune que le type ♀ rapporté par Castelnau de Potosi en 1845 et qui est exposé aux Galeries.

La couleur générale est d'un gris ardoisé assez foncé, plus clair que celui du type de l'espèce.

La tête et le cou en entier sont d'un noir mat qui est brillant en avant de l'œil. Les rectrices sont plus foncées que leurs couvertures supérieures, les sous-caudales sont blanches avec la pointe seule noire, tandis que, chez le type de l'espèce, la partie noire est plus allongée ; les barbes terminales des plumes du bas-ventre sont blanches, ce qui indique que ce spécimen n'est pas tout à fait adulte.

Les rémiges sont noires avec le bord alaire blanc, depuis la courbure jusqu'aux deux tiers ; leurs barbes externes, à partir de la deuxième, sont nettement bordées de blanc avec un pointillé noir ; les barbes internes sont largement bordées de blanc, comme sur le type. Les secondaires sont d'un blanc terne à leur extrémité en dessous, les sous-alaires sont grises.

La moitié de la mandibule supérieure et la pointe sont noires, tandis que le reste et la mandibule inférieure sont d'un jaune olivâtre. Le front porte une proéminence horizontale noire à extrémité étoilée, mais sa longueur est relativement faible, 16 millimètres au lieu de 33 sur le type. Les deux caroncules latérales polypoïdes, bien développées chez le type (10 millimètres), se montrent à la base (1 millimètre) de la corne frontale sur le spécimen du lac Poopo.

	TYPE (♀ montée)	SPÉCIMEN monté
Longueur totale	530	530
Culmen	50	50 (depuis la base de la caroncule)
Tarse	80	80
Doigt moyen sans griffe	95	95
Doigt moyen avec griffe	115	115
Aile	300	300
Queue	60	55

La longueur totale ne peut être qu'approximative à cause de la courbure donnée au cou pendant le montage. Comme on le voit, les dimensions de ce nouveau spécimen sont aussi concordantes que possible avec celles du type de l'espèce rapporté par Castelnau et Deville (1845) et conservé aux Galeries de Zoologie sous le numéro 13726. Bonaparte avait nommé cette femelle *Lycoruis cornuta* en 1854.

En 1902, M. Baer en a rapporté deux spécimens d'une lagune située au sommet du Cerro Pelado, à 5.000 mètres d'altitude. Cette espèce est donc très rare.

37. Fulica gigantea (Eyd. et Soul.).

F. g. Eydoux et Souleyet, *Voy. Bonite*, p. 102, Pl. VIII (1841, Pérou).

Un spécimen sans renseignements. Œil noir. Nom quichua, *Socamuchorra ;* nom aymara, *Soca*.

Le bouclier frontal est jaune orangé jusqu'aux narines, le reste du bec est rouge carmin foncé. La pointe des mandibules est blanche ; les tarses et les doigts sont rouge carmin.

Le Muséum possède le type de l'espèce (n° 13733) rapporté du Pérou par Eydoux et Souleyet en 1831, et un deuxième spécimen rapporté du Pérou par Castelnau et Deville en 1847.

Ardéidés

38. Nycticorax tayazuguira (Vieill.).

Ardea t. Vieillot, *N. Dict. Hist. nat.*, XIV, p. 419 (1817).

Un ♂, en beau plumage, avec belle huppe longue et blanche. Nom indigène, *Pajaro bobo*. Lac Titicaca, du 18 juillet 1903 ; tour des yeux rouge, pattes jaunes.

Un juv. des environs de Pazña Bastide, du 17 juin 1903 ; yeux orangés. Nom indigène, *Pajaro bobo*.

Le Muséum ne possédait pas cette espèce. Tazanowski et Sharpe l'avaient déjà signalée au lac Titicaca.

Laridés.

39. Larus serranus Tsch.

L. s. Tschudi, *Wieg. Archiv* (1844), I, p. 314, et *Fauna peruana, Aves* (1845-1846), p. 53 et 307.

a) Un ♂ au plumage d'hiver ; du lac Poopo, 11 juin 1903.

b) ♂ de Huancani, 5 juin 1903 ; *Gaviota*.

Le premier ♂ à la tête blanche avec une large tache auriculaire

noire, et une lunule noire en avant de l'œil. En outre, tout le devant de la tête, le piléum, et le pourtour des commissures sont finement mouchetés de noir.

Le deuxième ♂ est encore en plumage de noces, car il a la tête noire, mais on voit déjà bon nombre de plumes blanches au menton, sur tout le pourtour de la commissure et sur le piléum.

C'est une mouette des lacs de montagne que d'Orbigny avait déjà collectée en Bolivie (Cochabamba) en 1834.

Phœnicoptéridés

40. Phœnicopterus jamesi (Rahmer).

Ph. j. Rahmer *in litt.*: Sclater *P. Z. S.*, p. 399, Pl. 36 (1886, Tarapaca).

Six spécimens tués à Abrapampa (Argentine) (localité nouvelle pour cette espèce).

Sur un de ces spécimens (1907-867) la teinte rosée est à peine indiquée sur la tête et sur le cou. Les flammèches rouges n'existent que sur le jugulum et la poitrine antérieure. Les tectrices sont à peine rosées sur les barbes externes, mais le bout, très rouge chez les autres, n'est représenté ici que par la tige, comme si les barbes avaient été usées.

Un autre spécimen (1907-862) présente tous les autres caractères bien nets, sauf que les flammèches de la poitrine antérieure sont à peines indiquées, la teinte est manifestement rosée.

P. jamesi peut se distinguer de *P. andinus* par sa taille plus petite, mais c'est le bec qui présente le meilleur caractère.

Chez le premier le bec est court, et surtout la portion noire incurvée sur la base jaune. La partie rétrécie de la mandibule supérieure est rougeâtre, le point ultime noir. Cette partie très étroite est cachée dans la mandibule inférieure formant gouttière. Espace nu rouge devant l'œil (*P. Z. S.*, 1886, Pl. 36).

Chez *P. andinus* la portion incurvée est longue, la base plus courte est jaune verdâtre. La mandibule supérieure est large et recouvre la mandibule inférieure. Il a du rouge à la base de la mandibule inférieure entourant le menton (*Ibis*, 1869, Pl. 15, *fig.* 9 et 10, bec).

Podicipidés.

41. Podiceps micropterus Gould.

P. m. Gould. *P. Z. S.*, p. 220 (1868, lac Titicaca).

Un ♂ du lac Titicaca, 15 juillet 1903.

Le milieu de la poitrine antérieure est d'un blanc pur et non d'un rouge vineux.

Longueur totale, 400 millimètres; culmen, 38; doigt externe, 70; aile, 100.

C'est l'espèce qui porte les ailes les plus courtes comparativement à sa taille. Il est intéressant de faire remarquer que c'est sur les oiseaux qui habitent les régions nord du monde qu'on constate le plus souvent la diminution et presque la disparition des ailes et par conséquent la perte de l'aptitude au vol.

Stübel, deux spécimens du bord occidental du lac Titicaca, 3.800 mètres, décembre 1876 (nos 92 et 93).

Cette espèce est rare et paraît spéciale au lac Titicaca (Gould, Og. Grant, Sclater Salvin). Elle est nouvelle pour les collections du Muséum.

42. Podiceps caliparaeus juninensis Berl. et Stolz.

P. cal. j. Berlepsch et Stolzmann, *Ibis*, p. 112 (1894, lac Junin, 5.900 mètres d'altitude).

Un adulte en plumage de noces du lac Poopo, du 8 juin 1903.

Cette forme fait le passage entre *P. taczanowskii* et *P. caliparaeus*, typique.

N'a été signalée par Berlepsch et Stolzmann qu'au lac Junin, au Pérou central. Le lac Poopo est donc une nouvelle localité. Forme nouvelle pour les collections.

43. Podiceps americanus (Garnot).

P. am. Garnot, *Voy. Coquille, Zool.*, I, p. 599 (1826, Chili).

Un ♂ en plumage de noces du lac Titicaca, 15 juillet 1903.

Culmen, 21 millimètres depuis les plumes frontales; doigt externe, 51 millimètres.

Le Muséum possède des exemplaires rapportés de Bolivie en 1843 par d'Orbigny, des Yungas, par de Castelnau (1846) et d'Ushuaïa par l'expédition Charcot (1907).

Rhéidés.

44. Rhea darwini (Gould).

Vingt-quatre œufs de la République Argentine.

Anatidés.

45. Chlœphaga melanoptera (Eyt.).

Anas m. Eyton, *Monogr. anat.*, p. 93 (1838, lac Titicaca).

Un ♂ de Chililaya, lac Titicaca.

Un ♂ des lagunes de Huancani (Pérou, près du lac Titicaca). Bec et pattes d'un rouge vif, dessus du bec noir. Quatre spécimens en mauvais état. Nom indigène, *Ouagata*. Cette belle espèce des montagnes est nouvelle pour les collections du Muséum. Elle avait déjà été signalée au lac Titicaca par Eyton et Salvadori. Stübel, un spécimen ♂ d'Illimani (17 décembre 1876); 4.670 mètres (n° 80). Nom ind., *Huallata*.

46. Anas cristata alticola N. subsp.

A. cr. Gmelin, *Syst. Nat.*, I, p. 540 (1788, ex Latham, *Staaten-Land*).

Un ♂ du lac Poopo, du 11 juin 1903, yeux orangés; Pato real.

Le Muséum ne possédait aucun spécimen de Bolivie. La forme typique magellanique, qui a été appelée encore *A. specularioïdes* par King (1828), paraît être plus foncée. C'est ce que j'ai pu constater sur divers spécimens étudiés au Muséum Berlepsch et sur deux provenant de la baie Orange rapportés par la mission du cap Horn. Ces derniers avaient : ailes, 27 et 27 1/2; bec, 42. Un spécimen rapporté par d'Orbigny de l' « Amérique méridionale » a des dimensions encore plus faibles.

La forme de la Bolivie et du Pérou est de plus grande taille, avec une poitrine et un abdomen plus clairs. Les ailes dépassent 28 et peuvent aller à 32 centimètres. La queue est aussi plus longue, de même que le bec, qui atteint 55 millimètres et est plus large. Ces grandes dimensions ont déjà été indiquées pour le Pérou par Taczanowski. Le menton et la gorge sont d'un blanc sale, tandis que, sur la forme typique, le blanc paraît être constamment plus pur et moins pointillé de noir. Les sous-caudales paraissent être plus noirâtres. Il y a donc bien une forme des hautes montagnes, que je nomme *alticola*, dont se rapproche la forme habitant le Chili; mais, avant de décider si elle est identique à celle de la Bolivie et du Pérou, il sera nécessaire d'étudier des séries plus nombreuses.

Stübel a recueilli deux spécimens de cette grande forme à Tamarape et à Cosapilla, à une altitude d'environ 4.200 mètres. Leur aile dépasse 29 millimètres de longueur.

47. Nettion oxypterum (Meyen).

Anas ox. Meyen, *Nov. Act.*, XVI, suppl., p. 124, Pl. 26 (1833, sud du Pérou).

Un ♂ des environs de Pazña Bastide, du 17 juin 1903.

Un adulte. La bordure des plumes scapulaires et dorsales est d'une couleur plus vive, et elle est beaucoup plus large, en sorte que la partie noire médiane est plus réduite que dans le spécimen précédent.

Deux spécimens en mauvais état.

Cette espèce est nouvelle pour le Muséum.

Stübel en a rapporté quatre spécimens :

Un de Tamarape, 4.200 mètres, octobre-novembre 1876 (n° 24) ;

Un de Tambo Panduro, 4.200 mètres, octobre-novembre 1876 (n° 25) ;

Un du chemin de Sicasica, 4.200 mètres, octobre-novembre 1876 (n° 26) ;

Un du bord occidental du lac Titicaca, décembre 1876 (n° 87).

Ces exemplaires sont tous d'une hauteur de 4.000 à 4.200 mètres. La bordure claire qui limite en arrière la tache noire de l'œil est presque d'un blanc pur.

48. Dafila spinicauda (Vieill.).

Anas p. Vieillot, *N. Dict. H. nat.*, p. 145 (1816).

Un ♀ des rives du Rio Pazña, affluent du Poopo, du 4 juin 1903.

Un spécimen en mauvais état.

Cette espèce avait déjà été collectée en 1834 par d'Orbigny ; Stübel en a rapporté un spécimen de Finga de Yugabi, 3.800 mètres (lac Titicaca), décembre 1876 (n° 82). La longueur de l'aile atteint 28 centimètres.

49. Querquedula cyanoptera Vieill.

Q. cy. Vieillot, *N. Dict. Hist. nat.*, V, p. 106 (1817).

Un ♂ adulte ;

Un ♂ en plumage d'hiver (manque au Muséum) ;

Et un ♂ juv. en deuxième plumage, dont les sous-caudales sont noirâtres et indistinctement vermicellées.

Dans le premier spécimen, la barbe externe d'une longue scapulaire de chaque côté est d'un beau bleu comme les tectrices. Le bas-ventre, moins foncé que la poitrine, est marqué de taches noirâtres,

et les sous-caudales sont nettement marqués de stries châtaines, caractéristiques des oiseaux en plumage de noces.

Les collections du Muséum renferment plusieurs spécimens de ce canard aux ailes bleues, rapportés par la mission du cap Horn. C'est un oiseau de passage. Quand les mâles quittent l'Amérique du Nord, le plumage de noces commence à se montrer ; quand ils rentrent, le plumage est alors complet.

Stübel, un spécimen femelle du bord occidental du lac Titicaca, 3.800 mètres, décembre 1876 (n° 88). La longueur de l'aile dépasse celle indiquée par Sclater et Salvin, car elle atteint chez le ♂ 22 centimètres et chez la ♀ 21.

50. Querquedula puna (Tsch.).

Anas p. Tschudi, *Archiv f. Naturg.* (1834), I, p. 31 (Pérou), et *Fauna peruana : Aves*, p. 309 (1845-1846).

Un ♂ du lac Titicaca, 3.812 mètres, 4 avril 1903. Bec bleu, pattes gris bleuâtre.

Un ♂ du lac Titicaca, 3.812 mètres ; du 15 juillet 1903. Bec bleu ciel avec bande noire dessus.

Un ♀ sans renseignements.

Cet animal est spécial au centre du Pérou et de la Bolivie et au Nord du Chili (Tarapaca, Salvadori) ; d'Orbigny en a rapporté en 1834 un spécimen de Cochabamba, qui existe encore aux Galeries ; il a déjà été signalé par Sclater et Salvin en 1876 (*P. Z. S.*, p. 389). Un autre spécimen des Galeries rapporté par Gay (1843) est indiqué comme provenant de Santiago du Chili ; il se peut que cette indication soit fausse, pourtant cette espèce a été signalé dans la province de Tarapaca.

Sur les plumes des flancs, les stries blanches sont étroites, ayant à peine la moitié de la largeur des bandes brunes. Ce canard est très voisin de *A. versicolor* Vieill. dont il se distingue par son bec plus grand à coloration uniforme, par sa calotte noire plus foncée, par sa gorge d'un blanc plus pur et par ses stries plus fines en dessous.

Stübel, un spécimen, de Finga de Yugabi, 3.800 mètres (lac Titicaca), décembre 1876 (n° 82^{b}).

51. Merganetta leucogenys garleppi Berlp.

M. l. g. Berlepsch, *Ornith. Monatsb.*, II, p. 110 (1834, Bolivie et Tucuman).

Un ♂ adulte en beau plumage.

Un ♂ juv. presque adulte, bec et pattes rouges, environs de Yura, du 19 juin 1903.

Un ♀ adulte, bec noir, dessous rouge, œil rouge, pattes rouges en dessus, noires en dessous; des environs de Yura, 5.000 mètres, du 19 juin 1903.

Nom espagnol, *Pato ;* nom quichua *Naracito ;* aymara, *Chullumpi.*

Tête comme *leucogenys*, avec calotte bordée de blanc sur les côtés et en arrière. Les scapulaires, chez l'adulte, sont bordées d'un blanc moins pur ; cette couleur est pure sur le dos de *leucogenys ;* le jugulum et la poitrine sont d'un beau blanc avec grosses flammèches noires au milieu des plumes ; l'abdomen et le bas-ventre sont plus ou moins roussâtre pâle, mais blanc pur chez *leucogenys* typique. Chez le jeune, tout le jugulum, la poitrine et l'abdomen sont d'un ocreux pâle avec flammèches noires. Cette forme est un oiseau de montagne.

Des Murs, pour *M. armata* Gould, indique les pattes comme étant d'un noir verdâtre et le bec d'une couleur de corne brun rougeâtre. Ces couleurs seraient donc bien différentes de celles indiquées par le collecteur pour *M. l. garleppi* Berlp. Au Muséum Berlepsch, j'ai pu constater que des échantillons d'*armata* provenant de Magellan avaient les pattes rougeâtres.

La ♀ ressemble beaucoup à la femelle figurée par Des Murs (*Icon. orn.*, *fig.* 48, 1847).

La tête est gris cendre assez foncé, ainsi qu'une bande le long et en arrière du cou. En avant des yeux, les joues, les côtés du cou sont vermiculés de blanc et de noir ; ces zébrures se retrouvent sur l'occiput, là où chez le mâle il y a une bande blanche limitant en arrière la calotte noire. Le menton est roux, indistinctement strié ; la couleur rousse remonte latéralement jusqu'aux yeux. En arrière, elle se termine en une pointe qui se rattache au jugulum par une bande très étroite, car les vermiculations latérales empiètent sur le dessous du cou, ce qui n'existe pas chez les femelles de *leucogenys* typique. Quelques plumes du côté du cou, quoique rousses, sont striées de noir. Les plumes du dos sont noires, à bordure grisâtre, elles ressemblent à des flammèches ; les scapulaires sont noires, largement bordées de blanc ; le croupion et les sus-caudales sont plus finement vermicellées au milieu que sur le bord ; des plumes grises striées garnissent les culottes et se relient latéralement à celles du croupion et aux couvertures caudales. Les sous-alaires sont striées de blanc.

Les parties inférieures, à partir du jugulum, sont d'un roux cannelle riche, un peu plus accentué sur les flancs, tandis qu'à partir du bas-ventre, les barbes terminales des plumes sont de moins en moins foncées jusqu'aux dernières couvertures où elles sont blanches.

Ces régions sont donc beaucoup moins foncées. Les barbes des rectrices du jeune et de la femelle sont piquetées de gris sur les bords. Les ailes sont comme celles du mâle, avec miroir vert encadré de blanc.

DIMENSIONS	♂ ad.	♂ juv.	♀	CAT. BIRDS.
Longueur totale	430	420	435	425
Aile	176	173	162	175
Queue	124	124	110	120
Culmen	25	26	25	25
Bec (depuis la commissure)	36	37	36	
Tarse	35	36	34	26,8
Doigt médian	53	53	54	
Eperon alaire	17	4	4	

Sur le premier spécimen, l'éperon alaire est noir plombé ; sur le jeune ♂ , il est blanc jaunâtre et usé : chez le ♂ la base est noire, et l'usure est très forte des deux côtés.

La femelle de *M. l. garleppi* est donc très voisine de celle de *M. armata* Gould et de celle de *M. turneri* Scl. et Salv., mais diffère de celle de *M. columbiana* qui n'a pas les côtés du cou et des joues vermicellées de noir et blanc.

Au Muséum Berlepsch, une femelle adulte de *columbiana*, provenant de Mérida (janvier 1885), est d'un brun orangé sur l'abdomen, donc beaucoup plus pâle que celle de *garleppi* et de *turneri*. Les vermiculations grises du cou ne s'avancent pas en avant pour rétrécir la bande brun orangé, elles sont donc peu larges sur les côtés.

L'éperon alaire était petit. Le jeune paraît ressembler à la femelle.

Un oiseau de Laubramarca (Cuzco, Pérou) présente déjà du blanc au milieu et sur les côtés de l'abdomen et des striations au bord antérieur du menton. Les plaques du dos sont bordées de grisâtre.

La belle série que j'ai examinée au Muséum Berlepsch m'a permis de constater que, dans ces formes, les mâles bien adultes ont les plumes du dos avec bordure blanche nette, tandis que chez les animaux plus jeunes elles sont d'un brunâtre clair.

Le groupe de *leucogenys* comprend donc les diverses formes suivantes :

1° *M. leucog. leucogenys* (Tsch.) des sources de l'Aynamayo ;
2° *M. leucog. garleppi* Berlp. de la Bolivie ;

3° *M. leucog. turneri* Scl. et Salv. des Andes du Sud du Pérou ;

Et 4° probablement *M. l. columbiana* des Murs des Andes de l'Équateur, de la Colombie et du Vénézuéla (Mérida). J'ajouterai que le type de *columbiana* se trouve au Muséum de Paris.

ERRATUM

Lire : p. 93, lig. 23 [*Otaria jubata* (Forster)] ; p. 94, l. 3 [= *Monachus*, etc.] ; p. 95, l. 34. [(L) et *Ch. hoffmanni* Peters] ; p. 96, l. 39 (Raff.) ; p. 97, l. 14 [*C. Cuteri* Bennet, *C. porcellus* (L.)] ; id., l. 15 (Molina) ; id., l. 15 (Gm.) ; id., l. 18 (L.) ; id., l. 19 (Erxl.) et (Gesner) ; id., l. 24, *Macrotarsomys* ; p. 98, l. 5, *Acahis* ; p. 99, l. 8 (Grand) ; id., l. 9 (Blainv.)] ; id., l. 21 (Is. Geoff. et Dev.)] ; id., l. 23 (L.) ; id., l. 25, (L.) ; id., l. 26, *œdipus* (L.)] ; id., l. 34, *larvatus* (Wurmb.)].

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES DU TOME I

Pages.

Absence du foramen sus-épicondylien (importance systématique). — A. Menegaux 93
Anciens instruments de musique (Etude). — M. Marage 80
Applications des identités fondamentales de la géométrie analytique. — P. Deschamps 152
Arcachon (Eau de mer littorale). — P. Legendre 194
Banquet annuel 66
Biographie, bibliographie d'Henri Poincaré. — E. Lebon 146
Collection d'Oiseaux de Bolivie et du Pérou. — A. Menegaux 205
Collection de Poissons de l'Ogôoué. — J. Pellegrin 45
Colonies françaises (Géologie). — P. Lemoine 101
Commission des comptes (Rapport) 68
Complexe de dispersion. — G. Deschamps 12
Comptes rendus des séances (Extraits) 1, 63, 86 148
Concarneau (Eau de mer littorale) 194
Contribution à la connaissance géologique des colonies françaises. — P. Lemoine 101
Courbure géodésique (et surfaces applicables). — L. Leau 6
Densité de l'eau de mer littorale (Variations). — P. Legendre 194
Différence (Progressions par). — C.-A. Laisant 32
Dispersion (Complexe de). — J. Deschamps 12
Duc de Chaulnes (Un savant au XVIIIe siècle). — P. Mahler 72
Eau de mer littorale (Variations). — P. Legendre 194
Equilibre entre phases liquides et solides (Mélange NaCl + H^2O). — C. Matignon 76
Extraits des comptes rendus des séances 1, 63, 86 149
Foramen sus-épicondylien. — A. Menegaux 93
Fusion de la neige. — C. Matignon 76
Gaz et solides (Statique des réactions). — C. Matignon 88
Géologie des colonies françaises. — P. Lemoine 101
Géométrie analytique (Notes de). — J. Deschamps 152
Haug (E.) (Poissons recueillis par M.). — J. Pellegrin 45
Hauts plateaux de Bolivie (Oiseaux). — A. Menegaux 205
Henri Poincaré (Biographie, bibliographie analytique). — E. Lebon 146
Identités fondamentales de la géométrie analytique. — P. Deschamps 152
Instruments de musique anciens (Etude). — M. Marage 80
Laryngiennes (Voyelles). — M. Marage 84
Liste des membres de la société 57
Mélange NaCl + H^2O (Equilibre entre phases liquides et solides). — C. Matignon 76
Méthode graphique dans l'étude des instruments anciens. — M. Marage 80
Neige (Fusion: équilibre dans le mélange NaCl + H^2O). — C. Matignon 76

Pages.
Ngomo (Ogôoué) Poissons recueillis à . — J. Pellegrin..... 45
Observations sur le tremblement de terre de Provence. — P. Lemoine..... 112
Océanographie en Norvège. — Ch. Gravier..... 3
Oiseaux de Bolivie et du Pérou méridional. — A. Menegaux..... 205
Phases liquides et solides du mélange NaCl + H^2O. — C. Matignon..... 76
Poissons de Ngomo (Ogôoué). — J. Pellegrin..... 45
Poissons du genre *Vandellia* C. V. — J. Pellegrin..... 197
Présence du foramen sus-épicondylien (Importance systématique). — A. Menegaux..... 93
Problème combinatoire. — L. Leau..... 3
Propriétés des progressions par différence. — C.-A. Laisant..... 70
Provence (Tremblements de terre). — P. Lemoine..... 112
Rapport de la commission des comptes..... 68
Réactions entre gaz et solides (Statique). — C. Matignon..... 88
Récentes recherches océanographiques en Norvège. — Ch. Gravier..... 32
Savant (Un) du XVIIIe siècle : le duc de Chaulnes. — P. Mahler..... 72
Statique des réactions entre gaz et solides. — C. Matignon..... 88
Surfaces applicables (et courbure géodésique). — L. Lean..... 6
Température de l'eau de mer littorale (Variations). — P. Legendre..... 194
Teneur en O de l'eau de mer littorale (Variations). — P. Legendre..... 194
Tremblement de terre en Provence. — P. Lemoine..... 112
Utilité de la méthode graphique (Etude d'instruments de musique anciens). — M. Marage..... 80
Valeur systématique du foramen sus-épicondylien. — A. Menegaux..... 93
Vandellia C. V. (Poissons du genre). — J. Pellegrin..... 197
Variations de l'eau de mer littorale (T., O., densité). — P. Legendre..... 194
Voyelles laryngiennes. — M. Marage..... 84

TABLE DES AUTEURS

Pages.

Deschamps (P.) — Complexe de dispersion 12

— Notes de géométrie analytique. Identités fondamentales et premières applications 152

Gravier (Ch.) — Récentes recherches océanographiques en Norvège 32

Laisant (C.-A.) — Propriétés des progressions par différence 70

Leau (L.). — Sur un problème combinatoire 3

— Surfaces applicables et courbure géodésique 6

Lebon (E.) — Henri Poincaré, biographie, bibliographie analytique des écrits 146

Legendre (P.). — Variations de température, de densité et de teneur en oxygène de l'eau de mer littorale, à Concarneau et à Arcachon 194

Lemoine (P.). — Contribution à la connaissance géologique des colonies françaises 101

— Observations faites sur le tremblement de terre de Provence 112

Mahler (P.). — Un savant du XVIIIe siècle, le duc de Chaulnes 72

Marage (M.). — Utilité de la méthode graphique dans l'étude des instruments de musique anciens 80

— Les voyelles laryngiennes 84

Matignon (C.). — Equilibre entre phases liquides et solides dans le mélange NaCl + H^2O. — Fusion de la neige 79

— Statique des réactions dans lesquelles interviennent un gaz et des solides 88

Menegaux (A.). — Sur le peu d'importance systématique du caractère tiré de la présence ou de l'absence du foramen sus-épicondylien 93

— Etude d'une collection d'Oiseaux provenant des hauts plateaux, de la Bolivie et du Pérou méridional 205

Pellegrin (J.). — Sur une seconde collection de Poissons recueillie par M. E. Haug à Ngomo (Ogôoué) 45

— Sur les Poissons du genre *Vandellia* C. V. 197

Tours, imprimerie Deslis Frères, 6, rue Gambetta.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

DIXIÈME SÉRIE. — TOME II

1910

PARIS
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS
A LA SORBONNE
—
1910

Membres du Conseil

pour les années 1909, 1910 *et* 1911

MM.

André, 70 *bis*, rue Bonaparte.

D. Berthelot, 21, rue de Tournon.

Dongier, 87 *bis*, Grande-Rue, Bourg-la-Reine.

Grévy, 62, rue Saint-Placide.

Henneguy, 9, rue Thénard.

Laisant, 162, avenue Victor-Hugo.

Lévy (Lucien), 12, rue du Regard.

Vaillant, 36, rue Geof.-St.-Hilaire.

Membres du Bureau

pour 1909

Président : M. C. Matignon, 17, boulevard Carnot, Bourg-la-Reine.
Vice-Président : M. Hua, 234, boulevard Saint-Germain.
Trésorier : M. Rabaud, 3, rue Vauquelin.
Secrétaire des Séances : M. Winter, 44, rue Saint-Placide.
Vice-Secrétaire des Séances : M. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.
Secrétaire du Bulletin : M. Coutière, 118, avenue d'Orléans.
Vice-Secrétaire du Bulletin : M. Neuville, 55, rue de Buffon.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

ABRÉVIATIONS

A. M.	Assistant au Muséum.
E. E. P.	Examinateur à l'Ecole Polytechnique.
I. P. C.	Ingénieur des Ponts et Chaussées.
I. G. M.	Inspecteur général des Mines.
I. G. A.	— — de l'Agriculture.
M. A. M.	Membre de l'Académie de Médecine.
M. I.	— de l'Institut.
M. C.	Maître de conférences.
P. C. F.	Professeur au Collège de France.
P. A. M.	— au Conservatoire des Arts et Métiers.
P. E. N.	— à l'Ecole normale supérieure.
P. E. M.	— — des Mines.
P. E. P.	— — Polytechnique.
P. P. C.	— — des Ponts et Chaussées.
P. E. Ph.	— — Supérieure de Pharmacie.
P. F. M.	— à la Faculté de Médecine.
P. F. S.	— — des Sciences.
P. M.	— au Muséum.
P. H.	Professeur honoraire.

ÉTUDE ET AMITIÉ

LISTE DES MEMBRES

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

Fondée en 1788

État de la Société en Mars 1910

PREMIÈRE SECTION.— SCIENCES MATHÉMATIQUES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1859 (12 fév.). Lévy (Maurice), M. I., P. C. F., 15, avenue du Trocadéro.
1860 (2 juin). Haton de La Goupilliere (J.-Napoléon), M. I., 56, rue de Vaugirard.
1861 (13 avril). Tissot (Nic.-Aug.), E. E. P., à Voreppe (Isère).
1863 (28 mars). Rouché (Eugène), M. I., 213, boulevard Saint-Germain.
1871 (23 déc.). Collignon (Édouard), 6, rue de Seine.
— *id.* Darboux (Gaston), M. I. (Secrétaire perpétuel), Doyen Hon. F. S., 36, rue Gay-Lussac.
1872 (27 janv.). Jordan (Camille), M. I., P. E. P., P. C. F., 48, rue de Varennes.
1875 (26 juin). Fouret (Georges), E. E. P., 4, avenue Carnot.
1876 (23 déc.). Picquet (Henri), E. E. P., 4, rue Monsieur-le-Prince.
— *id.* André (Désiré), P. H., 70 *bis*, rue Bonaparte
1878 (26 janv.). Leauté, M. I., 20, boulevard de Courcelles.
— (9 fév.). Laisant, E. E. P., 5, rue du Conseil, à Asnières (Seine).

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1878 (9 fév.). Tannery, Dir. des Sc. E. N., 45, rue d'Ulm.
1881 (11 fév.). C. de Polignac, Radmannsdorf, Carniole (Autriche).
— *id.* Humbert (Georges), M. I., 6, rue d'Aubigny.
— (12 nov.). Chemin, P. P. C., 33, avenue Montaigne.
1884 (3 nov.). Lévy (Lucien), E. E. P., 12, rue du Regard.
1887 (17 déc.). Kœnigs, P. F. S., 101, boulevard Arago.
1892 (26 janv.). Bioche, Prof. Louis-le-G., 56, rue N.-D.-des-Champs.
1900 (10 mars). Leau, Prof. Stanislas, 6, rue Vavin.
— (22 déc.). Le Roy, Prof. Stanislas, 117, boulevard Raspail.
1902 (27 juin). Deschamps, 195, rue de Tolbiac.
1902 (13 déc.). Grévy, Prof. Saint-Louis, 71, rue Claude-Bernard.
1904 (20 nov.). Perrin (R.), I.G.M., 61, rue de Vaugirard.
1905 (14 janv.). Maillet, I. P. C., 11, rue de Fontenay, à Bourg-la-Reine (Seine).
1905 (27 mai). Servant, Chef des tr. F.S., 8, rue des Saints-Pères.
1906 (24 fév.). Lebon (Ernest), P. H., 4 *bis*, rue des Écoles.
1906 (12 mai). Tarry (Gaston), 182, boulevard de Strasbourg, Le Havre.
— (8 déc.). Fatou, astronome adjoint à l'Observatoire, 172, boulevard Montparnasse.
— (22 déc.). Henri (Victor), M. C. (Htes Etudes), 82, rue Claude-Bernard.
1907 (11 mai). Chapelon (J.-J.), Ing. au Corps des M., 21, rue Bréa.
1908 (9 mai). Rousier, 206, boulevard Raspail.
1909 (26 juin). Léauté (André) 60, boulevard Saint-Michel.
1909 (15 mars). Léauté (A.), Ing. au Corps des M., École des Mines.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1903 (28 mars). Lieutenant-Colonel du Génie Brocard, 75, rue des Ducs, Bar-le-Duc.
1905 (11 fév.). Berdon (Louis), 39, Cadogan Street, Londres S. W.
1906 (25 juin). Guccia, Palerme.
1907 (9 fév.). Desmoulin, P. F. S., 10, rue Joseph-Plateau, Gand.
1908 (12 déc.). A. Gérardin, 32, quai Claude-le-Lorrain, Nancy.

DEUXIÈME SECTION. — SCIENCES PHYSIQUES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1862 (10 juill.). Troost (Louis), M. I., P. H. F. S., 84, rue Bonaparte.
1863 (18 juill.). Grandeau (Louis), I. G. A., 4, avenue de La Bourdonnais.
1864 (31 janv.). Wolf (Charles), M. I., P. H. F. S., 36, avenue de l'Observatoire.
1872 (22 juin). Gernez (Désiré), M. I., P. E. N., 80, rue d'Assas.
1873 (12 avril). Fron, Météorologiste tit., 19, rue de Sèvres.
1874 (23 mai). Branly, Prof. Inst. Catholique, 21, av. de Tourville.
1875 (10 avril). Cailletet, M. I., 75, boulevard Saint-Michel.
1876 (27 mai). Bouty, M. I., P. F. S., 5, Faubourg Saint-Jacques.
1877 (24 fév.). Lippmann (Gabriel), M. I., P. F. S., 10, rue de l'Éperon.
1882 (11 fév.). Cochin, député, 53, rue de Babylone.
1884 (9 avril). Bourgeois (Léon), A. M., 1, boulevard Henri-IV.
1886 (17 avril). Bordet (Lucien), 181, boulevard Saint-Germain.
1887 (9 juillet). Vallot (Joseph), Directeur de l'Obs. du Mont-Blanc, 37, rue Cotta, à Nice.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1901 (26 janv.). Vincent, Prof. Saint-Louis, 207, rue de Vaugirard.
— (14 déc.). Benoist, Prof. Henri-IV, 26, rue des Écoles.
— (28 déc.). Dongier, Météor. tit. Obs. de Paris, 99, Grande-Rue, à Bourg-la-Reine (Seine).
— (13 déc.). Matignon, P. C. F., 17, boul. Carnot, Bourg-la-Reine.
1903 (28 fév.). Winter, 44, rue Saint-Placide.
— (14 mars). Berthelot (Daniel), P. E. Ph., 21, rue de Tournon.
— *id.* Desgrez, P. A. F. M., 78, boulevard Saint-Germain.
— (12 déc.). Darzens, Répét. E. P., 22, avenue Ledru-Rollin.
1904 (23 janv.). Chauveau, Météor. adj. Obs. de Paris, 51, rue de Lille.

1904 (29 mai). Moureu, M. A. M., P. E. Ph., 15, rue Soufflot.
— *id.* Mahler, Ingénieur civil des Mines, 2, rue Decamps.
— (9 juillet). Marage, 14, rue Duphot.
1905 (14 janv.). Hallion, chef de Lab. C. F., 54, faub. Saint-Honoré.
— (11 mars). Valeur, P. A. E. Ph., 73, boulevard Montparnasse.
— (1er avril). Goutal, P. suppl. E. M., 60, boulevard Saint-Michel.
— (13 mai). Mouneyrat, 20, rue Godot-de-Mauroi.
1906 (13 janv.). Mayer, M. C. (Hautes-Études), 33, rue du Faubourg-Poissonnière.
— (24 fév.). Joannis, P. F. S., 7, rue des Imbergères, Sceaux.
1907 (14 déc.). Becquerel (Jean), I. P. C., P. M., 15, boulevard Saint-Germain.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1905 (13 mai). Mathias, P. F. S., 44, allées Lafayette, à Toulouse.
— (22 juil.). Monpillard, 22, boulevard Saint-Marcel.

TROISIÈME SECTION. — SCIENCES NATURELLES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1856 (20 déc.). Prillieux (Ed.), M. I., sénateur, 14, rue Cambacérès.
1862 (7 mai). Bureau (Ed.), P. H. M., M. A. M., 24, quai de Béthune.
1863 (31 janv.). Vaillant (L.-L.), P. M., 36, rue Geof.-Saint-Hilaire.
1871 (9 déc.). De Seynes (Jules), P. A. F. M., 15, rue Chanaleilles.
— (23 déc.). Grandidier (A.), M. I., 71 *bis*, rue du Ranelagh.
— (26 déc.). Van Tieghem (Philippe), M. I., P. M., 22, rue Vauquelin.
1871 (26 déc.). Chatin (J.), M. I., M. A. M., P. F. S., 174, boulevard Saint-Germain.
1879 (10 mai). Henneguy (Louis-Félix), M. I., M. A. M., P. C. F., 9, rue Thénard.
1883 (26 mai). Mocquard, A. M. hon., 55, rue du Mont-Valérien, à Suresnes (Seine).
1886 (13 fév.). Bouvier (E. L.), M. I., P. M., 7, boulevard Arago.

1888 (11 fév.). Morot, A. M., 9, rue du Regard.
1890 (21 fév.). Roché, 4, rue Dante.
1893 (11 mars). Hua, Direct. adj. de Lab. (Hᵗᵉˢ Etudes), 254, boulevard Saint-Germain.
— (10 juin). Jousseaume, 29, rue Gergovie.
1893 (27 oct.). De Guerne, 6, rue de Tournon.
1894 (17 mars). Roland Bonaparte, M. I., 10, avenue d'Iéna.
1899 (14 janv.). Lecaillon, Prép. C. F., 28, rue Berthollet.
1899 (25 mars). Neuville, Prép. Mus., 55, rue de Buffon.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1889 ( ). Menegaux, A. M., 55, rue de Buffon (réintégré le 23 avril 1904).
1901 (12 janv.). Pellegrin, A. M., 143, rue de Rennes.
— (18 mai). Guieysse, Chef de Lab. F. M., 63, boulevard Saint-Michel.
1901 (11 janv.). Chauveau, Direct. adj. de Lab. (Hautes-Etudes), 16, avenue d'Orléans.
— (8 fév.). Rabaud, M. C. F. S., 3, rue Vauquelin.
— (27 juin). Lesage, Méd. des Hôp., 226, boulevard Saint-Germain.
— (22 nov.). Anthony, Prép. Muséum, 12, rue Chevert.
1903 (28 fév.). Coutière, P. E. Ph., 118, Avenue d'Orléans.
— (11 avril). Langeron, Prép. F. M., 78, rue de l'Abbé-Groult.
— (27 juin). Noé, Prép. F. M., 51, boulevard Montparnasse.
1904 (9 janv.). Grandidier (G.), 2, rue Gœthe.
— (23 janv.). De Boissieu, 80, avenue d'Iéna.
— *id.* Joubin, P. M., 88, boulevard Saint-Germain.
— (26 mars). Gravier, A. M., 55, rue de Buffon.
— (29 mai). Michel (Auguste), Prof. Michelet, 7, rue Nicole.
— (9 juil.). Launoy (L.), Prép. Inst. Pasteur.
1905 (28 janv.). Cayeux, P. E. M., P. I. A., 6, place Denfert-Rochereau.
— (8 juil.). Lemoine (Paul), Chef des trav. Muséum, 96, boulevard Saint-Germain.
1909 (13 mars). Legendre (R.), Prép. Mus., 24, rue Boissonnade.
— (26 juin). Rivet, A. M., 61, rue de Buffon.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1903 (27 juin). L. Petit, 211, rue de l'Église Saint-Seurin, à Bordeaux.
— (28 nov.). Devez, Cayenne.
1904 (23 avril). Bull, Prép. à l'Institut Marey, 1, avenue Malakoff.
— *id.* Tur, Ass. à l'Univ. de Varsovie.
— *id.* Malard, Chef de travaux Lab. de Zool. marit., St-Vaast-la-Hougue (Manche).
— (29 mai). Marceau, P. E. M., Besançon, à l'École de Médecine.
1905 (26 nov.). Maignon, Chef des trav. de Physiol., E. Vét. de Lyon.
— (11 mars). Neveu-Lemaire P. A. F. M., Lyon, à l'École de Médecine.
— (15 avril). Diguet (L.), 16, rue Lacuée.
1906 (24 févr.). Osman Galeb Bey, le Caire (Égypte).
1908 (25 avril). J. Jarricot, chef de lab. F. M., 9, cours Gambetta, Lyon.
1909 (26 juin). Fauré-Frémiet, 154, boulevard Malesherbes.
— — Semichon, prép. Museum, 27, rue Cassette.
— — Terroine, 4, rue des Fossés-Saint-Marcel.

NOTES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

APPLICATIONS DE NOS IDENTITÉS FONDAMENTALES [1]

Par M. le Dr Joseph DESCHAMPS.

Nous avons donné, à la fin de notre précédent mémoire, les premières applications les plus simples des identités que nous avons établies comme fondements de la théorie des formes quadratiques. Au lieu de suivre l'ordre logique qui consisterait à montrer comment ces identités s'appliquent aux diverses questions de la géométrie plane, nous préférons, pour montrer d'une manière plus frappante l'importance de nos identités, faire voir comment elles se présentent, dès les premiers débuts, en géométrie de l'espace aussi bien qu'en géométrie plane, dans toutes les questions d'angles et de distances. Cela nous permettra non seulement d'établir les analogies depuis longtemps constatées entre les géométries à deux et à trois dimensions, mais surtout de montrer combien est général et fréquent l'emploi de nos formules.

Nous nous attacherons en même temps à mettre en évidence l'unité de méthode qui aboutit à l'unité de forme dans les résultats.

Nous nous servirons, pour commencer, des coordonnées cartésiennes.

I. — FORME QUADRATIQUE SPHÉRIQUE ET FORME TANGENTIELLE CORRESPONDANTE. — SINUS DU TRIÈDRE DES AXES

Étant choisis trois axes de coordonnées OX, OY, OZ, faisant entre eux des angles :

$$\begin{aligned} \mathrm{YOZ} &= \lambda, \\ \mathrm{ZOX} &= \mu, \\ \mathrm{XOY} &= \nu, \end{aligned}$$

la position d'un point M est complètement déterminée par ses trois coordonnées x, y, z. Il s'impose immédiatement d'exprimer en fonction de ces coordonnées la distance $\mathrm{OM} = \rho$ du point à l'origine.

[1] Voir *Bulletin de la Société Philomatique*, série X, t. I, n° 4-5-6, 1909.

Projetons pour cela le contour des coordonnées du point successivement sur OX, OY, OZ et OM, nous aurons, en désignant par α, β, γ les angles respectifs de la droite OM avec les axes, les relations suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} x + y\cos\nu + z\cos\mu - \rho\cos\alpha = 0 \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda - \rho\cos\beta = 0 \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z - \rho\cos\gamma = 0 \\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0. \end{cases}$$

Multiplions les trois premières respectivement par x, y, z, et ajoutons-les en tenant compte de la quatrième ; nous trouvons ainsi :

$$(2)\qquad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

formule qui résout la question proposée.

La distance cherchée ρ est donc intimement liée à la forme quadratique à trois variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

que nous désignerons par $R(x, y, z)$ ou simplement par R, et qu'il est naturel d'appeler la forme sphérique, puisque l'équation (2) est au fond de l'équation de la sphère de centre O et de rayon ρ.

Or à la fonction R se rattache immédiatement et nécessairement son discriminant :

$$(3)\qquad T = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

dont la valeur développée est :

$$T = 1 + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu,$$

Ce déterminant dont les éléments sont exclusivement formés par les cosinus des angles des axes deux à deux, a été appelé *le sinus du trièdre des axes*. La raison de cette dénomination est que le déterminant T, toujours différent de zéro, est constamment positif et non supérieur à 1, ainsi que cela a été démontré depuis longtemps.

Déterminant réciproque du déterminant T. — Les mineurs principaux du déterminant T sont :

$$\begin{cases} 1 - \cos^2\lambda = \sin^2\lambda \\ 1 - \cos^2\mu = \sin^2\mu \\ 1 - \cos^2\nu = \sin^2\nu; \end{cases}$$

et les mineurs non principaux :

$$\begin{cases} \cos\mu\cos\nu - \cos\lambda \\ \cos\nu\cos\lambda - \cos\mu \\ \cos\lambda\cos\mu - \cos\nu, \end{cases}$$

que, pour abréger, nous désignerons par Λ, M, N. Avec ces notations, le déterminant réciproque T_r du déterminant T est :

$$(4) \qquad T_r = \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M \\ N & \sin^2\mu & \Lambda \\ M & \Lambda & \sin^2\nu \end{vmatrix},$$

et l'on sait qu'on a :

$$(5) \qquad T_r = T^2,$$

Nous remarquerons incidemment que les propriétés des déterminants réciproques nous donnent l'identité :

$$\sin^2\mu\sin^2\nu - \Lambda^2 = T$$

ou :

$$(6) \qquad \sin^2\mu\sin^2\nu - (\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)^2 = T,$$

La transformation en produit de la différence des carrés qui constitue le premier membre conduit à l'identité :

$$(7) \qquad T = 4\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2},$$

On obtient ainsi sans artifice aucun les formules (7) et (6), qui établissent les propriétés rappelées du sinus du trièdre des axes.

Forme tangentielle réciproque de la forme sphérique. — Menons par l'origine une droite OD de direction déterminée, faisant avec les

axes des angles α, β, γ. Il est facile de constater géométriquement que ces trois angles ne sont pas indépendants. Pour trouver analytiquement la relation qui les lie, il suffit de prendre sur la droite OD un point M de coordonnées x, y, z et ρ, et de projeter, comme on l'a déjà fait, le contour de ces coordonnées, ce qui fournit les relations (1) écrites plus haut. En éliminant x, y, z et ρ entre ces quatre relations, on obtient la relation cherchée :

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui détermine un des cosinus en fonction des deux autres.

Cette relation peut encore s'écrire :

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

Le second déterminant est la forme tangentielle réciproque de la forme sphérique R. Nous la désignerons par Γ (cos α, cos β, cos γ) ou simplement par Γ; en d'autres termes, nous posons l'égalité conventionnelle :

$$(10) \qquad \Gamma \equiv - \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix},$$

ou en développant le second membre :

$$(10') \qquad \begin{aligned} \Gamma \equiv \quad & \sin^2\lambda \cos^2\alpha + 2\Lambda \cos\beta \cos\gamma \\ & + \sin^2\mu \cos^2\beta + 2M \cos\gamma \cos\alpha \\ & + \sin^2\nu \cos^2\gamma + 2N \cos\alpha \cos\beta. \end{aligned}$$

La relation (9) peut alors s'écrire :

$$(11) \qquad \Gamma = T.$$

On voit ainsi que, *quelle que soit la direction considérée, la fonction quadratique* Γ *qui s'y rattache conserve une valeur constante.*

Quant à la fonction ponctuelle R dont nous avons donné l'expression développée :

$$R = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos\lambda + 2zx \cos\mu + 2xy \cos\nu,$$

elle peut s'écrire sous forme de déterminant de la manière suivante :

$$(12) \qquad R \equiv -\frac{1}{T}\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}.$$

Il en résulte pour la distance à l'origine du point (x, y, z) :

$$(13) \qquad \rho^2 = R = -\frac{1}{T}\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}.$$

Application. — *Calcul de l'angle que fait avec l'un des axes de coordonnées la perpendiculaire au plan des deux autres.* — Menons par l'origine une perpendiculaire au plan YOZ du même côté que la direction positive de l'axe OX, et désignons par l l'angle de cette droite avec OX. Comme elle fait avec les deux autres axes des angles droits, la relation

$$\Gamma = T$$

se réduit à :

$$\sin^2\lambda \cos^2 l = T,$$

d'où l'on tire :

$$\cos l = \frac{\sqrt{T}}{\sin\lambda}.$$

En menant de même des perpendiculaires aux autres plans coordonnés, on a la série :

$$(14) \qquad \begin{cases} \cos l = \dfrac{\sqrt{T}}{\sin\lambda}, \\ \cos m = \dfrac{\sqrt{T}}{\sin\mu}, \\ \cos n = \dfrac{\sqrt{T}}{\sin\nu}. \end{cases}$$

Volume du tétraèdre construit sur les coordonnées d'un point. — Soient $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ les coordonnées du point M ; nous nous proposons de calculer le volume du tétraèdre OABC. Prenons

pour base de ce tétraèdre le triangle OBC et pour hauteur la perpendiculaire $AD = h$ menée à cette base du sommet opposé A; nous aurons :

$$6V = yz \sin \lambda \times h.$$

Or :

$$h = x \cos l$$
$$= \frac{x\sqrt{T}}{\sin \lambda}$$

Il en résulte :

(15) $$6V = xyz\sqrt{T}.$$

En particulier le tétraèdre dont les trois arêtes sont égales à l'unité a pour expression :

(16) $$6V = \sqrt{T}.$$

Cette formule fournit la signification géométrique du déterminant T.

Pour terminer ces considérations relatives à un point et à une direction, calculons les angles α, β, γ que fait avec les axes le rayon vecteur OM d'un point M déterminé par ses coordonnées x, y, z. Ces angles sont fournis par les trois premières formules (1), desquelles on tire :

$$\begin{cases} \cos \alpha = \dfrac{x + y \cos \nu + z \cos \mu}{\rho} \\ \cos \beta = \dfrac{x \cos \nu + y + z \cos \lambda}{\rho}. \\ \cos \beta = \dfrac{x \cos \mu + y \cos \lambda + z}{\rho}. \end{cases}$$

En remplaçant ρ par sa valeur en fonction de x, y, z, et en remarquant que les numérateurs précédents sont les demi-dérivées partielles de la fonction R, il vient :

(17) $$\begin{cases} \cos \alpha = \dfrac{\frac{1}{2} R'_x}{\sqrt{R}} \\ \cos \beta = \dfrac{\frac{1}{2} R'_y}{\sqrt{R}} \\ \cos \gamma = \dfrac{\frac{1}{2} R'_z}{\sqrt{R}} \end{cases}$$

En résumé, à un point M de coordonnées x, y, z, et à une droite OD de directions α, β, γ, se rattachent les deux fonctions R et Γ réciproques l'une de l'autre. La fonction R a pour expression développée :

$$(I) \qquad R = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu;$$

le discriminant de cette fonction est le déterminant :

$$T = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\lambda \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

que nous avons désigné sous le nom de sinus du trièdre des axes, et qui admet comme déterminant réciproque, et moyennant les notations indiquées plus haut :

$$T_r = \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M \\ N & \sin^2\mu & \Lambda \\ M & \Lambda & \sin^2\nu \end{vmatrix} = T^2.$$

En vertu de l'une de nos identités fondamentales, la fonction R peut être écrite sous forme de déterminant comme il suit :

$$(I') \qquad R = -\frac{1}{T}\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}$$

Quant à la fonction réciproque Γ, elle est définie par l'une ou l'autre des égalités :

$$(II) \qquad \begin{aligned} \Gamma = {} & \sin^2\lambda\cos^2\alpha + 2\Lambda\cos\beta\cos\gamma \\ & + \sin^2\mu\cos^2\beta + 2M\cos\nu\cos\alpha \\ & + \sin^2\nu\cos^2\nu + 2N\cos\alpha\cos\beta, \end{aligned}$$

en posant pour abréger :

$$(18) \qquad \begin{cases} \Lambda = \cos\mu\cos\gamma - \cos\lambda \\ M = \cos\nu\cos\lambda - \cos\mu \\ N = \cos\lambda\cos\mu - \cos\nu \end{cases}$$

ou :

$$(II') \qquad \Gamma = -\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\gamma & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}$$

La fonction R est liée à la distance $OM = \rho$ du point M à l'origine par la relation :

$$R = \rho^2;$$

Quant à la fonction Γ, elle a une valeur constante, ainsi que l'exprime la relation :

$$\Gamma = T \tag{11}$$

établie plus haut.

Si maintenant nous considérons des systèmes formés par plusieurs directions ou par plusieurs points, tous les éléments géométriques se rattachant à ces systèmes pourront s'exprimer, comme nous allons le montrer, à l'aide de ces deux fonctions R et Γ.

Considérons en effet trois directions différentes $(\cos\alpha_1 \cos\beta_1 \cos\gamma_1)$, $(\cos\alpha_2 \cos\beta_2 \cos\gamma_2)$, $(\cos\alpha_3 \cos\beta_3 \cos\gamma_3)$, auxquelles correspondent, avec nos notations, les trois fonctions Γ_{11}, Γ_{22}, Γ_{33}, satisfaisant aux trois conditions :

$$\begin{cases} \Gamma_{11} = T \\ \Gamma_{22} = T \\ \Gamma_{33} = T \end{cases} \tag{17}$$

Formons le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}; \tag{III}$$

toutes les propriétés du système de deux ou trois directions seront exprimables par ce déterminant ou par les mineurs de divers ordres et de diverses natures de ce déterminant.

Considérons de même trois points différents $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$, auxquels correspondent les trois fonctions R_{11}, R_{22}, R_{33}. Le déterminant fonctionnel :

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} & R_{33} \end{vmatrix}, \tag{IV}$$

ainsi que ses mineurs de divers ordres et de diverses natures, exprimeront toutes les propriétés géométriques de ces systèmes.

C'est ce que nous allons établir rapidement.

II. — COUPLE DE DEUX DIRECTIONS.

Soient deux directions OD_1, OD_2 définies par les angles $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$. Elles forment un angle V qu'il s'agit d'exprimer en fonction des angles $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$.

Prenons pour cela sur OD_1 un point M de coordonnées $(x, y, z$ et $\rho)$, et projetons le contour de ces coordonnées successivement sur OX, OY, OZ et OD_2 ; nous aurons :

$$\begin{cases} x & + y\cos\nu & + z\cos\mu & - \rho\cos\alpha_1 = 0 \\ x\cos\nu & + y & + z\cos\lambda & - \rho\cos\beta_1 = 0 \\ x\cos\mu & + y\cos\lambda & + z & - \rho\cos\gamma_1 = 0 \\ x\cos\alpha_2 & + y\cos\beta_2 & + z\cos\gamma_2 & - \rho\cos V = 0, \end{cases}$$

d'où en éliminant x, y, z et ρ :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha_1 \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta_1 \\ \cos\mu & \cos\gamma & 1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & \cos V \end{vmatrix} = 0,$$

On tire de là :

$$\text{(19)} \qquad T\cos V = -\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha_1 \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta_1 \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & 0 \end{vmatrix},$$

ou en tenant compte d'une de nos identités :

$$\text{(19')} \qquad T\cos V = \Gamma_{12}.$$

Comme, d'autre part, on a d'après les formules (18) :

$$\Gamma_{11} = T,$$
$$\Gamma_{22} = T,$$

on voit que la valeur de cos V peut s'écrire soit sous la forme :

$$\text{(20)} \qquad \cos V = \frac{\Gamma_{12}}{T}.$$

soit sous la forme symétrique :

$$\text{(21)} \qquad \cos V = \frac{\Gamma_{12}}{\sqrt{\Gamma_{11}\,\Gamma_{22}}}.$$

Calcul de sin V. — On a :

$$\sin^2 V = \begin{vmatrix} 1 & \cos V \\ \cos V & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\Gamma_{12}}{\sqrt{\Gamma_{11}\,\Gamma_{22}}} \\ \dfrac{\Gamma_{21}}{\sqrt{\Gamma_{11}\,\Gamma_{12}}} & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplions la première ligne et la première colonne par $\sqrt{\Gamma_{11}}$, la deuxième ligne et la deuxième colonne pour $\sqrt{\Gamma_{22}}$, s'il vient après division hors barres :

$$\sin^2 V = \frac{1}{\Gamma_{11}\,\Gamma_{22}} \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix},$$

d'où :

$$\sin V = \frac{\left| \begin{matrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma_{11}\,\Gamma_{22}}} = \frac{\left| \begin{matrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}}}{T}. \tag{22}$$

Applications. — 1° *Expressions des dièdres du trièdre des axes de coordonnées en fonctions de ses faces.* — Menons par l'origine des perpendiculaires aux plans coordonnés du même côté que la troisième arête, et désignons par X, Y, Z les dièdres des plans coordonnés ayant pour arêtes respectives les axes OX, OY, OZ. L'angle plan du dièdre d'arête OX a pour supplément l'angle formé par les perpendiculaires aux plans coordonnés se coupant suivant l'axe OX. Or ces droites font respectivement avec les axes les angles :

$$\frac{\pi}{2},\quad m,\quad \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2},\quad n.$$

Par conséquent, la formule (19), jointe à la remarque précédente, nous donne :

$$T\cos X = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & 0 \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos m \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n & 0 \end{vmatrix}$$

ou

$$T \cos X = - \Lambda \cos m \cos n.$$

En remplaçant cos m et cos n par leurs valeurs (14) trouvées plus haut, il vient :

$$\cos X = - \frac{\Lambda}{\sin \mu \sin \nu};$$

d'où la suite :

$$(23) \qquad \begin{cases} \cos X = - \dfrac{\Lambda}{\sin \mu \sin \nu}, \\ \cos Y = - \dfrac{M}{\sin \nu \sin \lambda}, \\ \cos Z = - \dfrac{N}{\sin \lambda \sin \mu}. \end{cases}$$

On pourrait calculer sin X par l'application de la formule (22) ; mais on a plus simplement :

$$\begin{aligned} \sin^2 X &= 1 - \frac{\Lambda^2}{\sin^2 \mu \sin^2 \nu}, \\ &= \frac{\sin^2 \mu \sin^2 \nu - \Lambda^2}{\sin^2 \mu \sin^2 \nu}, \\ &= \frac{T}{\sin^2 \mu \sin^2 \nu}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\sin X = \frac{\sqrt{T}}{\sin \mu \sin \nu},$$

et par suite :

$$(24) \qquad \begin{cases} \sin X = \dfrac{\sqrt{T}}{\sin \mu \sin \nu}, \\ \sin Y = \dfrac{\sqrt{T}}{\sin \nu \sin \lambda}, \\ \sin Z = \dfrac{\sqrt{T}}{\sin \lambda \sin \mu}. \end{cases}$$

On déduit aisément de ces formules les suivantes :

$$(25) \qquad \frac{\sin X}{\sin \lambda} = \frac{\sin Y}{\sin \mu} = \frac{\sin Z}{\sin \nu} = \frac{\sqrt{T}}{\sin \lambda \sin \mu \sin \nu}.$$

Les formules (24) et (25) se traduisent par les énoncés suivants, qui appartiennent à la trigonométrie sphérique.

1° *Dans tout trièdre, le produit des sinus de deux faces par le sinus du dièdre compris est constant.*

2° *Dans tout trièdre, le rapport du sinus d'un dièdre au sinus de la face opposée est constant.*

Les formules (23) sont d'ailleurs elles aussi les formules de trigonométrie sphérique exprimant les relations qui existent entre les trois faces et un dièdre.

2° *Expressions des faces, des dièdres et du sinus du trièdre supplémentaire du trièdre des axes de coordonnées.* — Désignons par $\lambda'\,\mu'\,\nu'$ les faces, par $X'\ Y'\ Z'$ les dièdres et par T' le sinus de ce nouveau trièdre. On sait que ses faces et ses dièdres sont les suppléments respectifs des dièdres et des faces du premier.

Il en résulte en particulier :

$$(26)\qquad \begin{cases} \cos\lambda' = -\cos X = \dfrac{A}{\sin\mu\sin\nu} \\ \cos\mu' = -\cos Y = \dfrac{M}{\sin\nu\sin\lambda} \\ \cos\nu' = -\cos Z = \dfrac{N}{\sin\lambda\sin\mu}. \end{cases}$$

En transportant ces valeurs de $\cos\lambda'$ $\cos\mu'$, $\cos\nu'$ dans l'expression :

$$T' = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu' & \cos\mu' \\ \cos\nu' & 1 & \cos\lambda' \\ \cos\mu' & \cos\lambda' & 1 \end{vmatrix}$$

du sinus du second trièdre, il vient :

$$T' = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{N}{\sin\lambda\sin\mu} & \dfrac{M}{\sin\nu\sin\lambda} \\ \dfrac{N}{\sin\lambda\sin\mu} & 1 & \dfrac{A}{\sin\mu\sin\nu} \\ \dfrac{M}{\sin\nu\sin\lambda} & \dfrac{A}{\sin\mu\sin\nu} & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplions la première ligne et la première colonne par $\sin\lambda$, la deuxième ligne et la deuxième colonne par $\sin\mu$, la troisième ligne

et la troisième colonne par sin ν en ayant soin de diviser hors barres, il vient :

$$T' = \frac{1}{\sin^2\lambda \sin^2\mu \sin^2\nu} \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M \\ N & \sin^2\mu & \Lambda \\ M & \Lambda & \sin^2\nu \end{vmatrix},$$

ou plus simplement :

$$T' = \frac{T^2}{\sin^2\lambda \sin^2\mu \sin^2\nu}. \tag{27}$$

III. — SYSTÈME DE TROIS DIRECTIONS FORMANT UN TRIÈDRE

Menons par l'origine trois droites OD_1, OD_2, OD_3, dont les directions sont définies par les angles $(\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1)$, $(\alpha_3\ \beta_2\ \gamma_2)$, $(\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3)$. Il s'agit d'exprimer en fonction de ces angles :

1° Les faces du trièdre formé par ces trois droites ;

2° Les dièdres de ce trièdre ;

3° Son sinus.

Nous désignerons ces dièdres par A, B, C, en appelant A celui qui a pour arête la droite OD_1, ou simplement la droite 1, et ainsi de suite. Nous désignerons par suite les faces opposées à ces dièdres respectivement par a, b, c ; l'angle a étant formé par les droites 2 et 3, nous poserons :

$$a = (2,3)$$

et ainsi des autres.

1° *Faces du trièdre.* — Ces faces n'étant autres que les angles formés par deux droites, les formules (20) et (21) nous donnent immédiatement par disposition convenable des indices :

$$\begin{cases} \cos a = \cos(2,3) = \dfrac{\Gamma_{23}}{T} = \dfrac{\Gamma_{23}}{\sqrt{\Gamma_{22}\Gamma_{33}}}, \\ \cos b = \cos(3,1) = \dfrac{\Gamma_{31}}{T} = \dfrac{\Gamma_{31}}{\sqrt{\Gamma_{33}\Gamma_{11}}}, \\ \cos c = \cos(1,2) = \dfrac{\Gamma_{12}}{T} = \dfrac{\Gamma_{12}}{\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}. \end{cases} \tag{27}$$

Nous avons aussi par applications de la formule (22) :

$$(28)\quad \begin{cases} \sin a = \sin(2,3) = \dfrac{\left|\begin{matrix}\Gamma_{22} & \Gamma_{23}\\ \Gamma_{32} & \Gamma_{33}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma_{22}\Gamma_{33}}}, \\ \sin b = \sin(3,1) = \dfrac{\left|\begin{matrix}\Gamma_{33} & \Gamma_{31}\\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma_{33}\Gamma_{11}}}, \\ \sin c = \sin(1,2) = \dfrac{\left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}. \end{cases}$$

2° *Dièdres du trièdre.* — Les formules (23), qui expriment les cosinus des dièdres du trièdre des axes de cordonnées en fonctions de ses faces, sont naturellement générales. En les appliquant au trièdre formé par les trois droites considérées, et en tenant compte des valeurs de Λ, M, N, on a :

$$\cos A = -\frac{\cos b\cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = -\frac{\left|\begin{matrix}1 & \cos c\\ \cos b & \cos a\end{matrix}\right|}{\sin b \sin c}.$$

Par l'application des formules (27), qui fournissent les valeurs de $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, on a successivement :

$$\left|\begin{matrix}1 & \cos c\\ \cos b & \cos a\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}1 & \frac{\Gamma_{12}}{T}\\ \frac{\Gamma_{31}}{T} & \frac{\Gamma_{23}}{T}\end{matrix}\right| = \frac{1}{T^2}\left|\begin{matrix}T & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{23}\end{matrix}\right| = \frac{1}{T^2}\left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32}\end{matrix}\right|$$

D'autre part, par application des formules (28), qui fournissent les valeurs $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, on a :

$$\sin b \sin c = \frac{\left|\begin{matrix}\Gamma_{33} & \Gamma_{31}\\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma_{33}\,\Gamma_{11}} \times \sqrt{\Gamma_{11}\,\Gamma_{22}}}$$

$$= \frac{\left|\begin{matrix}\Gamma_{33} & \Gamma_{31}\\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{T}^2}$$

Il en résulte finalement par division :

$$\cos \mathrm{A} = \frac{\left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32}\end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix}\Gamma_{33} & \Gamma_{31}\\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}$$

d'où la série :

(29)
$$\begin{cases} \cos \mathrm{A} = \dfrac{\left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32}\end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix}\Gamma_{33} & \Gamma_{31}\\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}} \\ \cos \mathrm{B} = \dfrac{\left|\begin{matrix}\Gamma_{22} & \Gamma_{23}\\ \Gamma_{12} & \Gamma_{13}\end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix}\Gamma_{22} & \Gamma_{23}\\ \Gamma_{32} & \Gamma_{33}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}} \\ \cos \mathrm{C} = \dfrac{\left|\begin{matrix}\Gamma_{33} & \Gamma_{31}\\ \Gamma_{23} & \Gamma_{21}\end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix}\Gamma_{22} & \Gamma_{23}\\ \Gamma_{32} & \Gamma_{33}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix}\Gamma_{33} & \Gamma_{31}\\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

Pour calculer les sinus des mêmes angles, nous écrirons :

$$\sin^2 \mathrm{A} = 1 - \cos^2 \mathrm{A}$$

$$= 1 - \frac{\left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32}\end{matrix}\right|^2}{\left|\begin{matrix}\Gamma_{33} & \Gamma_{31}\\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11}\end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right|}$$

ou

$$\sin^2 \mathrm{A} = \frac{\left|\begin{matrix}\Gamma_{33} & \Gamma_{31}\\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11}\end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32}\end{matrix}\right|^2}{\left|\begin{matrix}\Gamma_{33} & \Gamma_{31}\\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11}\end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right|}$$

En vertu des relations qui existent entre les déterminants mineurs du déterminant réciproque d'un déterminant, cette expression de $\sin^2 A$ peut s'écrire :

$$\sin^2 A = \Gamma_{11} \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}}$$

Il en résulte la série :

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin A = \sqrt{\Gamma_{11}} \dfrac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \\ \sin B = \sqrt{\Gamma_{22}} \dfrac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}^{1}} \\ \sin C = \sqrt{\Gamma_{33}} \dfrac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{32} & \Gamma_{31} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}^{1}}{\begin{vmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right.$$

3° *Sinus du trièdre des trois droites.* — Désignons ce sinus par Θ ; nous devons :

$$\Theta = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}.$$

En remplaçant $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ par leurs valeurs (27), il vient :

$$\Theta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\Gamma_{12}}{T} & \frac{\Gamma_{31}}{T} \\ \frac{\Gamma_{12}}{T} & 1 & \frac{\Gamma_{23}}{T} \\ \frac{\Gamma_{31}}{T} & \frac{\Gamma_{23}}{T} & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplions par $\sqrt{T}$ la première ligne et la première colonne, la deuxième ligne et la deuxième colonne, la troisième ligne et la troisième colonne, et divisons hors barres, il vient :

$$\Theta = \frac{1}{T^3}\begin{vmatrix} T & \Gamma_{12} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{12} & T & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & T \end{vmatrix},$$

ou encore :

$$\Theta = \frac{1}{T^3}\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}, \tag{31}$$

ou enfin :

$$\Theta = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}}{\Gamma_{11}\,\Gamma_{22}\,\Gamma_{33}} \tag{31'}$$

Les identités fondamentales établies antérieurement (1) sont applicables à toutes les égalités que nous venons d'obtenir pour en obtenir la transformation et le développement. Nous nous contenterons de faire usage de l'identité qui s'applique à la dernière formule trouvée (31), ce qui nous donne :

$$\Theta = \frac{1}{T^3}\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}^2 \times \begin{vmatrix} \sin^2\gamma & N & M \\ N & \sin^2\mu & V \\ M & V & \sin^2\nu \end{vmatrix}$$

ou

$$\Theta = \frac{1}{T^3}\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}^2 \times T^2,$$

On tire de là la relation simple :

$$T\,\Theta = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}^2 \tag{32}$$

(1) Voir *Bulletin de la Société Philomathique*, numéro déjà cité.

qui se traduit par l'énoncé suivant : *Le produit des sinus de deux trièdres est toujours un carré.*

Application. — *Expression du sinus du trièdre supplémentaire du trièdre des axes de coordonnées.* — Désignons, comme nous l'avons déjà fait, par T′ le sinus de ce trièdre. En tenant compte des valeurs actuelles des cosinus, la formule précédente (32) se réduit à :

$$TT' = \begin{vmatrix} \cos l & 0 & 0 \\ 0 & \cos m & 0 \\ 0 & 0 & \cos n \end{vmatrix}^2$$

ou :

$$TT' = \cos^2 l \, \cos^2 m \, \cos^2 n \tag{33}$$

En remplaçant $\cos l$, $\cos n$ et $\cos m$ par leurs valeurs (12), il vient finalement

$$T' = \frac{T^2}{\sin^2\lambda \, \sin^2\mu \, \sin^2\nu}, \tag{34}$$

résultat déjà obtenu par une autre méthode.

IV. — COUPLE DE DEUX POINTS

Soient M_1 et M_2 deux points de coordonnées $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$. Il s'agit d'exprimer en fonctions de celles-ci :

1° Les distances des deux points à l'origine ;
2° Leur distance mutuelle ;
3° L'angle des rayons vecteurs OM_1, OM_2 ;
4° L'aire du triangle $OM_1 M_2$;
5° La distance de l'origine à la droite M_1M_2 ;
6° Les cosinus directeurs de l'axe du plan OM_1M_2.

1° *Distances des points à l'origine.* — Conformément à notre notation ces distances ρ_1 et ρ_2 sont fournies par les formules :

$$\begin{cases} \rho_1^2 = R_{11} \\ \rho_2^2 = R_{22}. \end{cases} \tag{35}$$

2° *Distance mutuelle des deux points.* — La longueur l de cette distance s'obtient en transportant l'origine au point (x_1, y_1, z_1), c'est

à-dire en remplaçant dans la fonction R les coordonnées x, y, z respectivement par $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, ce qui nous donne :

$$l^2 = R_{11} + R_{22} - R_{12}$$

D'après les remarques faites dans la démonstration de nos identités fondamentales, cette valeur peut se mettre sous forme de déterminant de la manière suivante :

$$(37) \qquad l^2 = \frac{1}{T}\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 & x_1 & x_2 \\ N & \sin^2\mu & L & 0 & y_1 & y_2 \\ M & L & \sin^2\nu & 0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ou symboliquement :

$$(37') \qquad l^2 = \frac{1}{T}\begin{vmatrix} T_r & 012 \\ \hline 012 & \end{vmatrix}$$

3° *Expression de l'angle* M_1OM_2. — Désignons cet angle par V, la géométrie nous donne :

$$l^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos V,$$

ou en tenant compte des résultats déjà obtenus :

$$R_{11} + R_{22} - 2R_{12} = R_{11} + R_{22} - 2\cos V \sqrt{R_{11} R_{22}}$$

On tire de là :

$$(38) \qquad \cos V = \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11} R_{22}}}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sin^2 V &= 1 - \cos^2 V \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \cos V \\ \cos V & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{R_{12}}{\sqrt{R_{11} R_{22}}} \\ \dfrac{R_{12}}{\sqrt{R_{11} R_{22}}} & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

et à l'aide de transformations déjà employées :

$$\sin^2 V = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12} & R_{22} \end{vmatrix}}{R_{11}\, R_{22}},$$

et finalement :

$$\sin V = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R_{11}\, R_{22}}} \tag{39}$$

4° *Aire du triangle* OM_1. — On a, en désignant cette aire par S :

$$\begin{aligned} 2S &= \rho_1 \rho_2 \sin V \\ &= \sin V \sqrt{R_{11}\, R_{22}}, \end{aligned}$$

d'où à l'aide de la formule (39) :

$$2S = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \tag{40}$$

5° *Distance de l'origine à la droite* M_1M_2. — L'expression de cette distance h est fournie par la relation :

$$lh = 2S,$$

où il n'y a plus qu'à faire les substitutions voulues.

6° *Cosinus directeurs de l'axe du plan* OM_1M_2. — Désignons par ξ, η, ζ, les angles que l'axe du plan OM_1M_2 fait avec les axes de coordonnées ; désignons en même temps par S_x, S_y, S_z les projections obliques sur les plans coordonnés de l'aire S.

On a :

$$\left\{ \begin{aligned} 2\, S_x &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \sin \lambda \\ 2\, S_y &= \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \sin \mu \\ 2\, S_z &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \sin \nu. \end{aligned} \right. \tag{41}$$

Projetons d autre part sur un plan perpendiculaire à OX l'aire S et sa projection oblique S_x ; il est facile de voir que ces deux projections sont égales, d'où par conséquent :

$$S \cos \xi = S_x \cos l$$

En remplaçant S_x par sa valeur qui vient d'être écrite et cos l par la valeur fournie par la formule (14), on a la valeur de cos ξ. On a ainsi la série :

$$(42) \qquad \begin{cases} \cos \xi = \dfrac{S_x \cos l}{S} \\ \cos \eta = \dfrac{S_y \cos m}{S} \\ \cos \zeta = \dfrac{S_z \cos n}{S}. \end{cases}$$

V. — SYSTÈME DE TROIS POINTS FORMANT UN TRIANGLE

Considérons trois points M_1, M_2, M_3, de coordonnées $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$. Il s'agit d'exprimer en fonction de ces données les éléments qui se rattachent à ce système, savoir :

1° Les distances des points à l'origine ou rayons vecteurs de ces points ;
2° Les distances mutuelles des points donnés ou longueurs des côtés du triangle ;
3° Les angles que font entre eux les rayons vecteurs ;
4° Les angles du triangle $M_1M_2M_3$;
5° Les aires des triangles OM_2M_3, OM_3M_1, OM_1M_2 ;
6° L'aire du triangle $M_1M_2M_3$;
7° Les dièdres du trièdre $OM_1M_2M_3$;
8° Le sinus de ce trièdre ;
9° Le volume du tétraèdre $OM_1M_2M_3$;
10° La distance de l'origine au plan $M_1M_2M_3$;
11° Les cosinus directeurs de l'axe de ce plan.

Un certain nombre de ces éléments figurent déjà dans le paragraphe précédent. Nous en ferons le simple rappel en introduisant les indices convenables, pour nous occuper plus spécialement des éléments nouveaux.

4° *Distances à l'origine ou rayons vecteurs des points donnés.* — On a :

$$(43)\qquad \begin{cases} \rho_1^2 = R_{11} \\ \rho_2^2 = R_{22} \\ \rho_3^2 = R_{33}, \end{cases}$$

2° *Distances mutuelles des points ou longueurs des côtés du triangle* $M_1M_2M_3$. — On a symboliquement :

$$(44)\qquad \begin{cases} l_{23}^2 = \dfrac{1}{T}\left|\dfrac{T_r}{023}\right| 023 \\ l_{31}^2 = \dfrac{1}{T}\left|\dfrac{T_r}{031}\right| 031 \\ l_{12}^2 = \dfrac{1}{T}\left|\dfrac{T_r}{012}\right| 012 \end{cases}.$$

3° *Angles des rayons vecteurs.* — Désignons par a, b, c, ces angles qui sont les faces du trièdre $OM_1M_2M_3$, et appliquons la formule (38) ; nous avons :

$$(45)\qquad \begin{cases} \cos a = \cos(2, 3) = \dfrac{R_{23}}{\sqrt{R_{22}\,R_{33}}} \\ \cos b = \cos(3, 1) = \dfrac{R_{31}}{\sqrt{R_{33}\,R_{11}}} \\ \cos c = \cos(1, 2) = \dfrac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}\,R_{22}}}. \end{cases}$$

Nous pouvons exprimer les mêmes angles par leurs sinus, et alors l'application de la formule (39) nous donne :

$$(46)\qquad \begin{cases} \sin a = \sin(2, 3) = \dfrac{\begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R_{22}\,R_{33}}} \\ \sin b = \sin(3, 1) = \dfrac{\begin{vmatrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R_{33}\,R_{11}}} \\ \sin c = \sin(1, 2) = \dfrac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R_{11}\,R_{22}}}. \end{cases}$$

4° *Angles du triangle* $M_1M_2M_3$. — Proposons-nous d'abord d'évaluer l'angle M_1 de ce triangle. Nous transporterons pour cela l'origine au point M_1 ; il nous suffira alors d'appliquer la première des formules (15) et aussi des formules (46), à la condition d'y remplacer $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$ respectivement par $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$, $(x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1)$. Pour trouver la forme particulière que prennent les formules ainsi modifiées, nous devrons remplacer les seconds membres par leurs expressions sous forme de déterminants, telles qu'elles résultent de nos identités fondamentales, et faire dans ces déterminants les substitutions indiquées. Il vient ainsi :

$$\cos M_1 = \frac{-\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x_2 - x_1 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y_2 - y_1 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x_2 - x_1 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y_2 - y_1 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z_2 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x_3 - x_1 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y_3 - y_1 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix}}}$$

$$\sin M_1 = \frac{T\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x_2 - x_1 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y_2 - y_1 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z_2 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x_3 - x_1 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y_3 - y_1 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix}}}$$

Or les déterminants symétriques à une seule rangée de variables qui figurent dans ces formules sont susceptibles d'être transformés en d'autres déterminants d'ordre plus élevé, mais homogènes par rapport aux coordonnées, en vertu d'une remarque faite dans la démonstration de nos identités fondamentales. Cette même remarque s'applique au déterminant non symétrique qui figure dans le numérateur de la valeur de cos M_1 et aussi au déterminant à deux rangées de variables qui figure au numérateur de sin M_1. Cela nous permet d'écrire les formules précédentes sous la forme :

$$\cos M_1 = \frac{\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 & x_1 & x_2 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 & y_1 & y_2 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 & x_1 & x_2 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 & y_1 & y_2 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 & x_1 & x_3 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 & y_1 & y_3 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 & z_1 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin M_1 = \frac{\sqrt{-T \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}}{\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 & x_1 & x_2 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 & y_1 & y_2 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 & x_1 & x_2 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 & y_1 & y_2 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}$$

En faisant usage des formes symboliques que nous avons indiquées, nous écrirons les formules précédentes et les formules analogues de la manière suivante :

$$(47)\quad \begin{cases} \cos M_1 = \dfrac{\left| \dfrac{T_r}{013} \right| 012 \Big|}{\left| \dfrac{T_r}{012} \right| 012 \Big|^{\frac{1}{2}} \times \left| \dfrac{T_r}{013} \right| 013 \Big|^{\frac{1}{2}}} \\ \cos M_2 = \dfrac{\left| \dfrac{T_r}{021} \right| 023 \Big|}{\left| \dfrac{T_r}{023} \right| 023 \Big|^{\frac{1}{2}} \times \left| \dfrac{T_r}{021} \right| 021 \Big|^{\frac{1}{2}}} \\ \cos M_3 = \dfrac{\left| \dfrac{T_r}{032} \right| 031 \Big|}{\left| \dfrac{T_r}{013} \right| 031 \Big|^{\frac{1}{2}} \times \left| \dfrac{T_r}{032} \right| 032 \Big|^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

$$(48)\quad \begin{cases} \sin M_1 = \dfrac{\sqrt{-T\left|\dfrac{T_r}{0123}\right|^{0123}}}{\left|\dfrac{T_r}{012}\right|^{012}\Big|^{\frac{1}{2}} \times \left|\dfrac{T_r}{013}\right|^{013}\Big|^{\frac{1}{2}}} \\ \sin M_2 = \dfrac{\sqrt{-T\left|\dfrac{T_r}{0123}\right|^{0123}}}{\left|\dfrac{T_r}{023}\right|^{023}\Big|^{\frac{1}{2}} \times \left|\dfrac{T_r}{021}\right|^{021}\Big|^{\frac{1}{2}}} \\ \sin M_3 = \dfrac{\sqrt{-T\left|\dfrac{T_r}{0123}\right|^{0123}}}{\left|\dfrac{T_r}{031}\right|^{031}\Big|^{\frac{1}{2}} \times \left|\dfrac{T_r}{032}\right|^{032}\Big|^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

5° *Aires des triangles* OM_2M_3, OM_3M_1, OM_1M_2. — Désignons ces aires par s_{23}, s_{31}, s_{12}; nous aurons par applications de la formule (40) du paragraphe précédent :

$$(49)\quad \begin{cases} 2\,s_{23} = \left|\begin{matrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \\ 2\,s_{31} = \left|\begin{matrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \\ 2\,s_{12} = \left|\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

6° *Aire du triangle* $M_1M_2M_3$. — L'expression de cette aire S est fournie par la formule :

$$2\,S = l_{12}\,l_{13}\sin M_1.$$

En remplaçant l_{12}, l_{13} et $\sin M_1$ par leurs valeurs fournies par les formules (44) et (48), il vient, toutes réductions faites :

$$(50)\quad 2S = \sqrt{-\left|\frac{T_r}{0123}\right|^{0123}}.$$

7° *Dièdres du trièdre* $OM_1M_2M_3$. — Désignons ces dièdres par A, B, C, ou encore par (1), (2), (3). Pour les calculer, nous remarque-

rons que les formules (23) applicables, comme nous l'avons dit, à des trièdres quelconques, nous donnent ici :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

ou

$$\cos A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos c \\ \cos b & \cos a \end{vmatrix}}{\sin b \sin c}.$$

En remplaçant les éléments contenus dans cette formule par leurs valeurs (45) et (46), il vient :

$$\cos A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{R_{12}}{\sqrt{R_{11} R_{22}}} \\ \dfrac{R_{31}}{\sqrt{R_{33} R_{11}}} & \dfrac{R_{32}}{\sqrt{R_{33} R_{22}}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{R_{11} \sqrt{R_{22} R_{33}}}$$

Multiplions la première ligne et la première colonne du numérateur par $\sqrt{R_{11}}$, la deuxième colonne par $\sqrt{R_{22}}$, et la deuxième ligne par $\sqrt{R_{33}}$ en ayant soin de hors trois barres par les mêmes facteurs, il vient, toutes réductions faites :

$$\cos A = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{31} & R_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}$$

Le même procédé de calcul appliqué aux deux autres cosinus nous donne la série de formules :

$$(51)\quad \begin{cases} \cos A = \dfrac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{31} & R_{32} \end{vmatrix}}{\left|\begin{matrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}} \\ \cos B = \dfrac{\begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{12} & R_{13} \end{vmatrix}}{\left|\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{13} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}} \\ \cos C = \dfrac{\begin{vmatrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{23} & R_{21} \end{vmatrix}}{\left|\begin{matrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

Du calcul des cosinus on déduit le calcul des sinus. En procédant comme nous avons fait dans la question analogue traitée au cours du paragraphe III, nous avons, pour exprimer sin A, sin B, sin C, les formules suivantes :

$$(52)\quad \begin{cases} \sin A = \sqrt{R_{11}}\, \dfrac{\left|\begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}{\left|\begin{matrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}} \\ \sin B = \sqrt{R_{22}}\, \dfrac{\left|\begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}{\left|\begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}} \\ \sin C = \sqrt{R_{33}}\, \dfrac{\left|\begin{matrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}{\left|\begin{matrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

8° *Sinus du trièdre* $OM_1M_2M_3$. — Désignons ce sinus par Θ; il a pour expression en fonction de ses faces :

$$\Theta = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}.$$

En remplaçant dans cette formule cos a, cos b, cos c, par leur valeur (45) et en dirigeant le calcul comme nous l'avons déjà fait, il vient :

$$\Theta = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{R_{11}\ R_{22}\ R_{23}} \tag{53}$$

En appliquant au numérateur celle des identités fondamentales qui lui est applicable, il vient :

$$\Theta = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 \times \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}}{R_{11}\ R_{22}\ R_{23}}, \tag{53'}$$

d'où la relation simple :

$$\frac{\Theta}{T} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2}{\rho_1^2\ \rho_2^2\ \rho_3^2}, \tag{54}$$

qui se traduit par l'énoncé suivant : *Le quotient des sinus de deux trièdres quelconques est toujours un carré.*

9° *Volume du tétraèdre* $OM_1M_2M_3$. — En prenant pour axes de coordonnées les droites OM_1, OM_2, OM_3, et en appliquant la formule (15), il vient :

$$6\,V = \rho_1\,\rho_2\,\rho_3\,\sqrt{\Theta},$$

d'où, en remplaçant Θ par sa valeur (53) :

$$6\,V = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \tag{55}$$

ou encore :

$$6\,V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \sqrt{T}. \tag{55'}$$

10° *Distance de l'origine au plan* $M_1M_2M_3$. — Cette distance δ est fournie par la formule :

$$6V = 2S\delta \tag{56}$$

dans laquelle il n'y a plus qu'à faire les substitutions nécessaires.

11° *Cosinus directeurs de l'axe du plan* $M_1M_2M_3$. — Désignons par S_x, S_y, S_z les projections obliques sur les plans coordonnés de l'aire S, et par X, Y, Z, les déterminants obtenus en supprimant dans le tableau :

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{matrix} \right\|$$

les première, deuxième et troisième colonnes. En remarquant que

$$2S_x = X \sin \lambda,$$

et en procédant exactement comme dans le cas du système de deux points, nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \xi &= \frac{X\sqrt{T}}{2S} \\ \cos \mu &= \frac{Y\sqrt{T}}{2S} \\ \cos \zeta &= \frac{Z\sqrt{T}}{2S}. \end{aligned} \right. \tag{55}$$

VI. — SYSTÈME DE QUATRE POINTS FORMANT UN TÉTRAÈDRE

Considérons maintenant quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, de cordonnées $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$, $(x_4y_4z_4)$. Nous avons à exprimer, à l'aide de ces coordonnées ou en fonction de ces coordonnées, les éléments suivants qui caractérisent le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$, savoir :

1° Les arêtes du tétraèdre ;
2° Les faces (angles) du tétraèdre ;
3° Les aires des faces du tétraèdre ;
4° Les angles dièdres ;
5° Les sinus de ses divers trièdres ;
6° Son volume ;
7° Ses hauteurs.

1° *Arêtes du tétraèdre.* — Soit l_{pq}, la longueur de l'arête joignant deux sommets p et q. Nous avons immédiatement par ce qui précède :

$$l^2_{pq} = \frac{1}{T}\left|\frac{T_r \mid opq}{opq}\right|. \tag{56}$$

2° *Faces (angles) du tétraèdre.* — Soit p, q, r les numéros d'ordre de trois sommets du tétraèdre pris dans leur ordre de permutation. Considérons dans cette face l'angle de sommet p ; les formules (47) et (48) nous donnent :

$$\cos M_p = \frac{\left|\frac{T_r \mid opq}{opr}\right|}{\left|\frac{T_r \mid opq}{opq}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r \mid opr}{opr}\right|^{\frac{1}{2}}} \tag{57}$$

$$\sin Mp = \frac{\sqrt{-T\left|\frac{T_r \mid opqr}{opqr}\right|}}{\left|\frac{T_r \mid opq}{opq}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r \mid opr}{opr}\right|^{\frac{1}{2}}}. \tag{58}$$

3° *Aires des faces du tétraèdre.* — Considérons la face $M_pM_qM_r$; elle a pour expression :

$$2S = \sqrt{-\left|\frac{T_r \mid opqr}{opqr}\right|}, \tag{59}$$

la lettre S devant être affectée de l'indice ne figurant pas dans le groupe p, q, r.

4° *Dièdres du tétraèdre.* — Considérons en particulier le dièdre d'arête M_1M_2 ; il a pour arête le côté l_{12} et pour faces les triangles d'aires S_3, S_4. Pour trouver l'expression de ce dièdre, il suffit de transporter l'origine en M_1 et d'appliquer les formules (51) et (52) en remplaçant les coordonnées $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$, respectivement par $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, $(x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$, dans les développements des déterminants qui figurent dans ces expressions. On aura ainsi, en faisant usage de nos formes symboliques :

$$(60)\qquad \cos(M_1M_2) = \frac{\left|\frac{T_r}{0124}\,|\,0123\right|}{\left|\frac{T_r}{0123}\,|\,0123\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r}{0124}\,|\,0124\right|^{\frac{1}{2}}}$$

$$(61)\qquad \sin(M_1M_2) \times \frac{\left|\frac{T_r}{012}\,|\,012\right|^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \sqrt{T}}{\sqrt{\left|\frac{T_r}{0123}\,|\,0123\right| \times \left|\frac{T_r}{0124}\,|\,0124\right|}}$$

Les formules relatives aux autres dièdres se déduisent facilement de celles-ci par permutation.

5° *Sinus des trièdres des tétraèdres.* — Considérons par exemple le trièdre de sommet M_1 que nous désignerons par Θ_1. Transportons encore l'origine en M_1, et appliquons la formule (53), dans laquelle nous ferons les substitutions précédemment indiquées; nous aurons sous forme symbolique,

$$(62)\qquad \Theta_1 = \frac{T^4 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}^2}{\left|\frac{T_r}{012}\,|\,012\right| \times \left|\frac{T_r}{013}\,|\,013\right| \times \left|\frac{T_r}{014}\,|\,014\right|}$$

Les sinus des trois autres trièdres se déduisent aisément de celui-ci.

6° *Volume du tétraèdre.* — On transporte encore l'origine au sommet M_1, et en appliquant de la même manière la formule (55) ou (55'), il vient :

$$(63)\qquad 6\,V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \sqrt{T}.$$

7° *Hauteurs du tétraèdre.* — La hauteur h_p, issue du sommet M_p, se déduit immédiatement de la relation :

$$6\,V = 2\,S_p \times h_p, \tag{64}$$

où il suffit de faire les substitutions nécessaires

RÉSUMÉ

Pour terminer, nous allons réunir dans un tableau d'ensemble les principaux résultats obtenus dans l'étude des systèmes considérés. Nous ne ferons figurer dans ce tableau que les éléments caractéristiques des systèmes.

I. — DIRECTIONS

1° *Direction unique.* — Relations entre les cosinus directeurs :

$$T = \Gamma_{12} = -\left|\frac{T}{1}\,{}^{1}\right|.$$

2° *Couple de deux directions.* — Angle des deux directions :

$$T\cos(1,2) = \Gamma_{12} = -\left|\frac{T}{2}\,{}^{1}\right| \tag{I}$$

$$T\sin(1,2) = \left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} = \left|\frac{T}{12}\,{}^{12}\right|^{\frac{1}{2}}. \tag{II}$$

3° *Système de trois directions.* — *a*) Dièdre d'arête (1) formé par les directions (1,2) et (1,3) :

$$\cos(1) = \frac{\left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32}\end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{13}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{33}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left|\frac{T}{13}\,{}^{12}\right|}{\left|\frac{T}{12}\,{}^{12}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T}{13}\,{}^{13}\right|^{\frac{1}{2}}} \tag{III}$$

$$\sin(1) = \frac{\sqrt{\Gamma_{11}}\left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}{\left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{13}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{33}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\left|\frac{T}{1}\,{}^{1}\right| \times \left|\frac{T}{123}\,{}^{123}\right|}}{\left|\frac{T}{12}\,{}^{12}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T}{13}\,{}^{13}\right|^{\frac{1}{2}}}. \tag{IV}$$

b) Sinus du trièdre des trois directions :

$$(V)\quad \Theta = \left| \begin{matrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{matrix} \right| \Big/ \left| \begin{matrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{11} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \end{matrix} \right| = \frac{T^2 \left| \frac{T \mid 123}{123} \right|}{\left| \frac{T \mid 1}{1} \right| \times \left| \frac{T \mid 2}{2} \right| \times \left| \frac{T \mid 3}{3} \right|}.$$

II. — POINTS

Eu égard à la nature des formules, il y a lieu de les partager en deux catégories, suivant qu'elles expriment les relations des points ou systèmes de points avec l'origine ou les relations des points entre eux.

Premier groupe : Relations avec l'origine. — 1° *Point unique.* — Distance à l'origine ou longueur du rayon vecteur :

$$(VI)\qquad \rho_1^2 = R_{11} = -\frac{1}{T} \left| \frac{T_r \mid 1}{1} \right|.$$

2° *Couple de deux points.* — *a*) Angle des deux rayons vecteurs :

$$(VII)\qquad \cos(1,2) = \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}\, R_{22}}} = \frac{-\left| \frac{T_r \mid 1}{1} \right|}{\sqrt{\left| \frac{T_r \mid 1}{1} \right| \times \left| \frac{T_r \mid 2}{2} \right|}}.$$

$$(VIII)\quad \sin(1,2) = \frac{\left| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R_{11}\, R_{22}}} = \frac{T \left| \frac{T_r \mid 12}{12} \right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left| \frac{T_r \mid 1}{1} \right| \times \left| \frac{T_r \mid 2}{2} \right|}}.$$

b) Aire du triangle OM_1M_2 :

$$(IX)\qquad 2\,S = \left| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{T_r \mid 12}{12} \right|^{\frac{1}{2}},$$

3° *Système de trois points.* — *a*) Dièdre d'arête OM_1 dans le trièdre $OM_1M_2M_3$:

$$(X)\quad \cos(OM_1) = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{13} & R_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} R_{11} & R_{13} \\ R_{31} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left|\frac{T_r}{13}\right|^{12}}{\left|\frac{T_r}{12}\right|^{12}\Big|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r}{13}\right|^{13}\Big|^{\frac{1}{2}}}$$

$$(XI)\quad \sin(OM_1 = \frac{\sqrt{R_{11}}\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} R_{11} & R_{13} \\ R_{31} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\left|\frac{T_r}{1}\right|^{1} \times \left|\frac{T_r}{123}\right|^{123}}}{\left|\frac{T_r}{12}\right|^{12}\Big|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r}{13}\right|^{13}\Big|^{\frac{1}{2}}}.$$

b) Sinus du trièdre $OM_1M_2M_3$:

$$(XII)\quad \Theta = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{R_{11}\ R_{22}\ R_{33}} = \frac{T_1 \left|\frac{T_r}{123}\right|^{123}}{\left|\frac{T_r}{1}\right|^{1} \times \left|\frac{T_r}{2}\right|^{2} \times \left|\frac{T_r}{3}\right|^{3}}$$

c) Volume du tétraèdre $OM_1M_2M_3$:

$$(XIII)\qquad 6\ V = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \left|\sqrt{-T\left|\frac{T_r}{123}\right|^{123}}\right|.$$

Deuxième groupe : Relations de points entre eux. — 1° *Couple de deux points.* — Distance des deux points :

$$(XIV)\qquad l^2 = \frac{1}{T}\left|\frac{T_r}{012}\right|^{012}.$$

2° *Système de trois points.* — *a*) Angle de sommet M_1 dans le triangle $M_1M_2M_3$:

$$(XV)\qquad \cos M_1 = \frac{\left|\frac{T_r}{013}\right|^{012}}{\left|\frac{T_r}{012}\right|^{012}\Big|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r}{013}\right|^{013}\Big|^{\frac{1}{2}}}$$

$$(\text{XVI}) \qquad \sin M_i = \frac{\sqrt{-T\left|\frac{T_r \mid 0123}{0123}\right|}}{\left|\frac{T_r \mid 012}{012}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r \mid 013}{013}\right|^{\frac{1}{2}}}$$

b) Aire du triangle $M_1M_2M_3$:

$$(\text{XVII}) \quad 2S = \sqrt{-\left|\frac{T_r \mid 0123}{0123}\right|}.$$

3° *Système de quatre points.* — *a*) Dièdre d'arête M_1M_2 dans le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$:

$$(\text{XVIII}) \qquad \cos(M_1M_2) = \frac{\left|\frac{T_r \mid 0123}{0124}\right|}{\sqrt{\left|\frac{T_r \mid 0123}{0123}\right| \times \left|\frac{T_r \mid 0124}{0124}\right|}}$$

$$(\text{XIX}) \qquad \sin(M_1M_2) = \frac{\left|\frac{T_r \mid 012}{012}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r \mid 01234}{01234}\right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left|\frac{T_r \mid 0123}{0123}\right| \times \left|\frac{T_r \mid 0124}{0124}\right|}}$$

b) Sinus du trièdre de sommet M_1 dans le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$:

$$(\text{XX}) \qquad \Theta_1 = \frac{\left|\frac{T_r \mid 01234}{01234}\right|}{\left|\frac{T_r \mid 012}{012}\right| \times \left|\frac{T_r \mid 013}{013}\right| + \left|\frac{T_r \mid 014}{014}\right|}.$$

c) Volume du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$:

$$(\text{XXI}) \qquad 6V = \left|\frac{T_r \mid 01234}{01234}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

On peut remarquer qu'aucune des formules de ce second groupe ne renferme le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

pas plus qu'aucun de ses déterminants mineurs ou éléments. Dans ces formules, le noyau central primitif T_r, qui est un déterminant du troisième ordre, se trouve remplacé par un autre noyau obtenu en encadrant l'ancien de zéros, ainsi qu'il suit :

$$\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ce nouveau noyau, qui joue le rôle d'un discriminant du quatrième ordre, peut être encadré de quatre lignes et de quatre colonnes de coordonnées, au lieu de trois comme le précédent. Cette circonstance analytique est l'indication que, abstraction faite du cas où l'on considère des directions envisagées comme simples directions, les coordonnées cartésiennes ne constituent pas le système naturel et logique de coordonnées. L'encadrement obligé par des zéros du noyau primitif est comme une invitation à employer et même à imaginer, s'il n'était pas déjà inventé, le système des coordonnées tétraédriques qui introduira une forme quadratique fondamentale à quatre variables et avec elle un discriminant-noyau du quatrième ordre susceptible d'être encadré de quatre lignes et de quatre colonnes de coordonnées et vraiment capable d'exprimer toutes les propriétés du tétraèdre.

Les études que nous venons de faire dans le plan et dans l'espace exigent donc des études complémentaires qui feront l'objet de mémoires ultérieurs.

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes intentionnellement abstenus de donner aucun développement aux formules obtenues. Ces développements ne sont utiles que dans le cas particulier des coordonnées rectangulaires pour obtenir les formes plus simples correspondantes. Dans tout autre cas, et même dans ce dernier cas, les formules synthétiques trouvées sont, au contraire, d'interprétation commode et, par le fait même de leur condensation, se prêtent, ainsi qu'on a pu s'en convaincre, parfaitement au calcul.

THÉORÈMES ET LOIS POUR LA DÉCOMPOSITION DE GRANDS NOMBRES EN DEUX FACTEURS [1] ;

Par Ernest LEBON.

Comme, dans ce travail, j'ai en vue la décomposition des grands nombres, je suppose connue la décomposition des nombres inférieurs à 9 millions, limite des Tables de facteurs premiers.

1. Je désigne sous le nom de *formes* Φ les polynômes entiers en x. La *classe I* comprend les formes

$$\Phi(1) = x^{\alpha} \pm x^{\beta} \pm x^{\gamma} \pm \ldots\ldots \pm 1$$

dans lesquelles les exposants α, β, γ,..., décroissent, le terme de degré le plus élevé a le coefficient 1, les autres termes ont le coefficient ± 1, le terme indépendant de x est ± 1.

Les formes Φ (1) comprennent les formes Φ (1′) où tous les coefficients sont positifs, et les formes Φ (1″) où des coefficients sont positifs et d'autres négatifs.

Les formes Φ (1) sont dites *complètes* quand les exposants de x sont les entiers consécutifs de α à 0.

Une forme est dite *première* lorsqu'elle ne peut pas être décomposée en un produit de deux formes.

Il est facile d'écrire les formes Φ de la classe I pour les divers degrés de ces formes.

2. La signification des symboles employés pour représenter les formes a été expliquée dans le *Bulletin* (9e série, t. XI, 1908, p. 168-170).

3. Le nombre des formes du degré n de $(n\bar{0})$ à (n_0) inclus est donné par la formule

$$2,3^{n-1}.$$

Pour la classe I, j'ai vérifié que les rapports du nombre des formes

[1] Séance du 28 novembre 1908 de la Société Philomathique de Paris.

composées au nombre total des formes sont respectivement pour les degrés

3	4	5	6,
$\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$	$\frac{20}{54}=\frac{10}{27}>\frac{1}{3}$	$\frac{57}{162}=\frac{19}{54}>\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}>\frac{193}{486}>\frac{1}{3}$.

Ces rapports montrent qu'il y a intérêt à exprimer les grands nombres en formes pour chercher à les décomposer rapidement en deux facteurs.

4. Quand la base du système de numération est 2, la suite des formes Φ (I′) donne, de 1 à (n_0) compris, les nombres impairs ; la suite des formes Φ (I″) donne, de 1 à $(\bar{n}0)$ inclus, les nombres impairs et plusieurs fois certains d'entre eux.

5. D'après cette remarque et d'après les valeurs des rapports précédents, il sera avantageux d'exprimer les nombres dans la base 2, lorsque l'on voudra les représenter par des formes pour chercher leur décomposition en facteurs.

6. Quand la base du système de numération est 3, la suite des formes Φ (I) donne de 1 à (n_0) inclus, les nombres non multiples de 3.

7. Quand la base du système de numération est 10, la suite des formes Φ (I′) comprend les nombres représentés par des 1, ou par des 1 et des 0. Alors, peuvent aisément être écrits sous la forme Φ (I″) beaucoup de nombres dont le chiffre des unités simples est 1 ou 9, dont les autres chiffres sont des 0, des 1, des 8, des 9.

8. Lorsqu'une forme de la classe I est divisible par une forme de cette classe, on trouve souvent pour quotient une forme de la classe I. Si ce quotient contient au moins un terme dont le coefficient, en valeur absolue, est supérieur à 1, sa forme sera dite des classes II, III,..., selon que la valeur absolue du plus grand coefficient sera 2, 3,...

9. Quand une forme Φ est le produit de deux formes et que l'on exprime ce fait, on obtient une *identité* qui est vraie, quelle que soit la valeur de x. Cette identité constitue un *théorème*.

De telles identités, où les exposants et les coefficients sont numériques, peuvent conduire à des identités dans lesquelles tous les

exposants ou la plupart sont littéraux. J'appellerai *Lois* ces identités littérales (1).

J'ai obtenu beaucoup de lois très générales. Telle est la suivante :

$$(2m+1\ \overline{\overline{m+r}}\ \overline{\overline{m+1}}\ m\ \overset{\div r}{\overline{\overline{m+1-r}\smile 1}}\ 0)$$
$$= (m+1\ \overset{\div r}{\overline{\overline{r}\smile 1}}\ \bar{0})\ (m+r\ \bar{m}\ \bar{0}) \qquad (m = kr),$$

où le signe : r indique que les termes sur lesquels il se trouve croissent en progression arithmétique de raison r, où m, doit être un multiple de r. Le premier membre est une forme de la classe I si $r > 1$.

10. Une Loi étant donnée, on peut, pour chaque valeur de l'exposant m, prendre pour valeur de la variable x un nombre quelconque : on obtient ainsi autant de nombres que l'on veut et leur décomposition en deux facteurs. Les Lois peuvent donc être avantageusement utilisées quand on cherche à décomposer en facteurs premiers une suite de grands nombres.

11. Si l'on avait beaucoup de Lois, convenablement classées, on pourrait, dans un grand nombre de cas, résoudre rapidement le problème consistant à décomposer en deux facteurs un nombre donné : il suffirait d'arriver à écrire ce nombre sous une forme Φ qui appartînt au premier membre d'une Loi ou du théorème dont celle-ci dépend. Lorsqu'un nombre peut être décomposé en un produit de deux facteurs, trouver une forme qui le représente et qui soit décomposable en un produit de deux formes donnant ces facteurs est un problème que l'on ne peut résoudre ni méthodiquement, ni rapidement. En effet, comme il y a une infinité de formes Φ pouvant représenter un nombre donné ; c'est après plusieurs essais et souvent par hasard que l'on arrive à trouver une forme Φ décomposable en deux facteurs. Par exemple, pour le nombre 1961, exprimé dans le système de numération de base 10, on n'a pas immédiatement l'idée d'écrire

$$1961 = 2000 - 30 - 9$$
$$= 20.10^2 - 3.10 - 9,$$

(1) Le Journal *Sphinx-Œdipe* (1908, Nancy, p. 81-83, 97-101) contient les Lois dont j'ai parlé au Congrès tenu du 3 au 10 août 1908 à Clermont-Ferrand par l'Association française pour l'Avancement des Sciences.

pour considérer la forme

$$20x^2 - 3x - 9,$$

dont on trouve la décomposition en deux facteurs binomes $4x - 3$ et $5x + 3$ par la méthode des coefficients indéterminés, après avoir fait le produit des formes $mx + n$ et $px + q$.

12. Je donne ci-dessous le Tableau des formes premières de la classe I jusqu'au degré 4 inclus. Ces formes sont rangées en *groupes* obtenus en faisant $x = 1$ dans les formes ; ces groupes sont caractérisés par les nombres suivants :

0, —1, 1, —1, 2, —3, 3, 4, 5

TABLEAU DE FORMES PREMIÈRES

0	1	— 2	3
$1\ \bar{0}$	$2\ \bar{1}\ 0$	$3\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{0}$	$2\ 1\ 0$
	$2\ 1\ \bar{0}$		$3\ 1\ 0$
— 1	$3\ \bar{1}\ 0$	2	$3\ 2\ 0$
	$3\ 1\ \bar{0}$		$4\ 1\ 0$
$2\ \bar{1}\ \bar{0}$	$3\ \bar{2}\ 0$	$1\ 0$	$4\ 3\ 0$
$3\ \bar{1}\ \bar{0}$	$3\ 2\ \bar{0}$	$2\ 0$	$4\ \bar{3}\ 2\ 1\ 0$
$3\ \bar{2}\ \bar{0}$	$4\ \bar{1}\ 0$	$3\ \bar{2}\ 1\ 0$	$4\ 3\ \bar{2}\ 1\ 0$
$4\ \bar{1}\ \bar{0}$	$4\ 1\ \bar{0}$	$3\ 2\ \bar{1}\ 0$	$4\ 3\ 2\ \bar{1}\ 0$
$4\ \bar{2}\ \bar{0}$	$4\ \bar{2}\ 0$	$3\ 2\ 1\ \bar{0}$	$4\ 3\ 2\ 1\ \bar{0}$
$4\ \bar{3}\ \bar{0}$	$4\ 2\ \bar{0}$	$4\ 0$	
$4\ \bar{3}\ \bar{2}\ \bar{1}\ 0$	$4\ \bar{3}\ 0$	$4\ 2\ \bar{1}\ 0$	4
$4\ \bar{3}\ \bar{2}\ 1\ \bar{0}$	$4\ 3\ \bar{0}$	$4\ \bar{3}\ 1\ 0$	
$4\ \bar{3}\ 2\ \bar{1}\ \bar{0}$	$4\ \bar{3}\ \bar{2}\ 1\ 0$	$4\ 3\ \bar{1}\ 0$	$4\ 2\ 1\ 0$
$4\ 3\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{0}$	$4\ \bar{3}\ 2\ \bar{1}\ 0$	$4\ \bar{3}\ 2\ 0$	$4\ 3\ 2\ 0$
	$4\ \bar{3}\ 2\ 1\ \bar{0}$		
	$4\ 3\ \bar{2}\ \bar{1}\ 0$	— 3	5
	$4\ 3\ \bar{2}\ 1\ \bar{0}$		
	$4\ 3\ 2\ \bar{1}\ \bar{0}$	$4\ \bar{3}\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{0}$	$4\ 3\ 2\ 1\ 0$

A l'aide de ce Tableau, on peut rapidement décomposer en deux formes, dont l'une au moins est Φ (1), les formes Φ composées du degré 5 au degré $2.4+1$ ou 9 inclus, lorsqu'elles admettent une forme Φ (1) comme diviseur, par la *méthode* qui suit. Cette méthode réussit toujours pour tout nombre composé, quand on est parvenu à lui donner une forme qui soit le produit de deux formes dont l'une au moins admet un des facteurs du Tableau.

13. Méthode. — Soit donnée une forme Φ de degré $2m+1$. Il faudra la diviser par les formes premières Φ (1), du degré 1 au degré m, contenues dans les groupes qui vont être déterminés.

Appelons V la valeur numérique prise par la forme Φ quand on y fait $x=1$.

Soit $V=0$.

Alors Φ est divisible par $(1\bar{0})$.

Soit $V<0$ ou $V>0$.

1° Supposons que la valeur absolue V′ de V soit un nombre premier.

Si V est négatif, on a

$$V=1.(-V'):$$

on doit diviser Φ par les formes, jusqu'au degré m inclus, des groupes 1 et $-V'$.

Si V est positif, on a

$$\begin{aligned} V &= (-1).(-V') \\ &= 1.V': \end{aligned}$$

on doit diviser Φ par les formes, jusqu'au degré m inclus, des groupes -1, 1, $-V'$, V'.

2° Supposons que la valeur absolue V′ de V soit un nombre composé; admettons que V′ soit le produit des nombres premiers a et b.

Si V est négatif, on a

$$\begin{aligned} V &= 1.(-V') \\ &= (-a).b \\ &= a.(-b): \end{aligned}$$

on doit diviser Φ par les formes, jusqu'au degré m inclus, des groupes 1, $-V'$, $-a$, b, a, $-b$.

Si V est positif, on a

$$\begin{aligned} V &= (-1)(-V) \\ &= 1.V \\ &= (-a)(-b) \\ &= a.b : \end{aligned}$$

on doit diviser Φ par les formes, jusqu'au degré m inclus, des groupes -1, $-V$, 1, V, $-a$, $-b$, a, b.

Lorsque V′ est le produit de plus de deux nombres premiers, il faut considérer les produits deux à deux de ces nombres.

14. En faisant, dans un ordre quelconque, les divisions qui viennent d'être indiquées, si l'on trouve que la forme Φ est divisible par une forme du Tableau, on peut écrire l'identité qui exprime que la forme Φ est un produit de deux formes. La forme diviseur appartient à la classe 1 ; la forme quotient est ou non décomposable; pour le reconnaître, on lui applique la méthode.

J'ai vérifié que les formes composées de la classe I, pour les degrés de 1 à 6 inclus, admettent toutes au moins un diviseur appartenant à cette classe. Mais il faudrait démontrer que cette propriété est toujours vraie pour pouvoir affirmer que la forme considérée Φ (I) est première, quand on a appliqué la méthode sans trouver de forme première divisant la forme Φ (I).

15. Premier exemple. — Soit, dans le système de numération de base 10, le nombre 11100999. On voit que ce nombre peut être ainsi écrit :

$$11\ 1009\ 99 = 11101000 - 1 ;$$

Donc, ce nombre est de la forme

$$\Phi(I'') = (7653\bar{0}) ;$$

en y faisant $x = 1$, on trouve 3 ; en divisant la forme Φ (I″) par la première forme (210) du groupe 3, on trouve pour quotient la forme

$$\Phi_1(I'') = (51\bar{0}) ;$$

en y faisant $x = 1$, on trouve 1 ; en divisant la forme Φ_1 (I″) par la première forme $2\bar{1}0$ du groupe 1, on trouve pour quotient la forme

$$\Phi_2(I'') = (32\bar{0}),$$

qui est dans le groupe 3.

On a donc

$$\begin{aligned}(76530) &= (210)\,(5\bar{1}0)\\ &= (210)\,(2\bar{1}0)\,(32\bar{0}).\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}11\ 100\ 999 &= 111 \cdot 91 \cdot 1099.\\ &= 3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 157.\end{aligned}$$

16. Second exemple. — Soit, dans le système de numération de base 10, le nombre

$$N = 999\ 888\ 989\ 011.$$

On voit que

$$\begin{aligned}N &= 11 \cdot 90\ 898\ 999\ 001\\ N &= 11 \cdot N'.\end{aligned}$$

Or, on peut écrire

$$N' = 101\ 000\ 000\ 001 - 10\ 101\ 001\ 000;$$

donc N′ est de la forme

$$\Phi'(\Pi') = (11\ \overline{10}\ \overline{98630}).$$

En faisant $x = 1$ dans cette forme, on trouve 1. Or

$$1 = (-1)\,(1);$$

on obtient assez rapidement

$$\Phi'(\Pi') = (5\bar{3}0)\ (\bar{6}\bar{5}0);$$

par suite

$$N' = 100\ 999 \cdot 89\ 999.$$

Avec la Table de Burckhardt, on trouve que 100 999 est premier et que 89 999 égale 397. 2267.

17. Remarques. — Avant d'essayer les diviseurs premiers du Tableau, on tiendra compte des remarques suivantes :

I. Le théorème élémentaire de la divisibilité d'un polynôme entier en x par $x \mp a$ indique immédiatement si la forme Φ est divisible par la forme $(1\bar{0})$ ou par la forme (10).

II. Comme on peut écrire

$$(20) = (1\bar{i})\,(1i),$$

i représentant $\sqrt{-1}$, si après avoir remplacé dans une forme Φ, x par i, on a un résultat, où la partie réelle et où le coefficient de i sont nuls, la forme Φ est divisible par la forme (20).

III. Par la mise en facteur commun, on reconnaîtra souvent qu'une forme Φ peut être décomposée en un produit de deux formes.

IV. Parfois l'addition, à une forme, de deux termes égaux en valeur absolue et de signes contraires donne une forme où l'on voit la mise en facteur commun d'une forme. Par exemple, soit la forme $94\bar{1}0$; on reconnaît que la forme équivalente $(95\bar{5}4\bar{1}0)$ peut s'écrire ainsi :

$$(4)\,(5\bar{1}0) + (5\bar{1}0) \quad \text{ou} \quad (40)\,(5\bar{1}0).$$

V. Lorsque l'on veut appliquer la méthode à un nombre, il est souvent mieux de ne pas le remplacer par le nombre que l'on obtiendrait en le divisant par les nombres premiers dont la forme n'est pas dans le Tableau.

VI. En faisant successivement x égal à 2, 3, 4, ... dans une forme, dès que l'on trouve un nombre premier pour valeur numérique, on peut conclure que la forme considérée est première. Par les nombres composés que l'on trouve ainsi, on peut reconnaître si la forme admet comme diviseur une forme du Tableau. Par exemple, pour la forme (510), on trouve successivement les nombres

$$35 = 7.5, \quad 247 = 13.19, \quad 1029 = 21.49,$$

comme 7, 13, 21 ont pour forme (210), on en conclut que la forme (510) est divisible par la forme (210).

18. Pour la décomposition des formes des classes supérieures à la classe I, je donne à présent deux lois dont l'application se présente souvent.

I. En multipliant l'une par l'autre les deux formes $(\alpha \frown \omega)$ et $\alpha' \frown \omega')$, on trouve cette suite des formes simples :

$$\begin{aligned}&((\alpha + \alpha') + (\omega + \omega'))\\ &+ ((\alpha + \alpha' - 1) \frown (\omega + \omega' + 1))\\ &+ ((\alpha + \alpha' - 2) \frown (\omega + \omega' + 2))\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ ((\alpha + \omega') \frown (\omega + \alpha')),\end{aligned}$$

le nombre des lignes étant égal au nombre des termes de la forme qui en contient le moins. Ces termes formant un trapèze, je conviens de les représenter symboliquement et d'écrire ainsi la loi :

$$tra \begin{pmatrix} (\alpha + \alpha') \frown (\omega + \omega') \\ (\alpha + \omega') \frown (\omega + \alpha') \end{pmatrix} = (\alpha \frown \omega)\ (\alpha' \frown \omega').$$

Le trapèze devient un triangle quand $\alpha + \omega' = \omega + \alpha'$, c'est-à-dire quand les formes $(\alpha \frown \omega)$ et $(\alpha' \frown \omega')$ ont le même nombre de termes.

II. Si l'on fait $\alpha = \alpha'$ et $\omega = \omega'$, on a le carré de la forme $(\alpha \frown \omega)$; l'ensemble des termes forme un triangle; la loi peut s'écrire ainsi :

$$tri \begin{pmatrix} 2\alpha \frown 2\omega \\ \alpha + \omega \end{pmatrix} = (\alpha \frown \omega)^2.$$

19. Application. — Soit, dans le système de numération de base 10, le nombre

123 454 321.

Après avoir décomposé ce nombre en une somme de puissances de 10, on reconnaît qu'il peut être écrit sous la forme suivante :

$$tri \begin{pmatrix} 8 \frown 0 \\ 4 \end{pmatrix};$$

cette forme est le carré de la forme 43210; donc le nombre donné est le carré de 11111.

LE RÉSEAU INTERNE DE GOLGI DES CELLULES NERVEUSES DES GANGLIONS SPINAUX ;

Par R. LEGENDRE.

En 1898, Golgi signala dans les cellules nerveuses des ganglions spinaux et de quelques autres organes un appareil réticulaire interne, distant des surfaces nucléaire et cellulaire et présentant l'aspect de fibrilles ondulées réunies en un réseau irrégulier, avec des renflements nodaux et certaines terminaisons libres. Cet appareil fut retrouvé chez divers animaux par Veratti, Soukhanoff, etc. En 1907, Cajal décrivit dans la plupart des cellules nerveuses un appareil réticulaire analogue au précédent. En 1908, Golgi indiqua une nouvelle méthode permettant de mettre en évidence ce réseau avec une grande facilité et, en 1909, Marcora appliqua cette nouvelle méthode à diverses études sur les cellules nerveuses.

Si l'observation répétée du réseau interne a mis son existence hors de doute, non seulement dans les cellules nerveuses, mais encore dans beaucoup d'autres cellules (Pensa, Negri, Gemelli, Veratti, Marenghi, Brugnatelli, Stropeni, Golgi), son interprétation a donné lieu à plusieurs opinions discordantes. Dès 1898, Golgi, tout en déclarant que ce réseau est différent des neurofibrilles, ne voulut pas se prononcer sur sa signification probable. Holmgren, Studnicka, Retzius, Kölliker admirent que cet appareil est un réseau de canalicules semblables à ceux décrits par Holmgren sous le nom de Trophospongium ; Soukhanoff, au contraire, insista sur ce fait qu'il n'atteint pas la périphérie de la cellule ; Athias essaya de concilier les deux opinions en supposant que seule la partie interne des canalicules est décelée par la méthode de Golgi ; Cajal identifia les deux formations qu'il réunit sous le nom de conduits de Golgi-Holmgren et les compara à la vésicule pulsatile des Infusoires ciliés ; Marinesco les considéra également comme analogues. D'autre part, Goldschmidt et Popoff homologuèrent le réseau interne aux chondriomites et aux mitochondries.

J'ai déjà démontré (1) la nature pathologique des canalicules de

(1) R. Legendre, *C. R. Soc. Biol.*, t. LXIV, 1908 ; *C. R. Assoc. des Anat.*, X^e^ réunion, 1908 ; *Archives d'Anatomie microscopique*, t. X, 1908.

Holmgren et repoussé leur identification avec le réseau interne ; Golgi (1) vient d'affirmer également que cette comparaison n'a aucun fondement. J'ai déjà repoussé l'analogie du réseau interne et des mitochondries ; Golgi (2) et Perroncito (2) viennent de confirmer cette opinion. Mes observations sur les cellules épithéliales du Lombric et l'examen des figures de conduits de Golgi-Holmgren publiées par Cajal m'avaient conduit à penser que le réseau de Golgi pourrait bien être « un aspect particulier du spongioplasma, ses varicosités étant dues à la substance chromatophile. » Cette hypothèse fut contredite par Collin et Lucien (3), qui virent l'appareil réticulaire localisé à la partie centrale de cellules à corps de Nissl périphériques ; elle reçut au contraire une preuve de Marcora (4) qui, tout en n'admettant pas l'identification du réseau et des corps de Nissl, leur trouva de grandes analogies : aspect semblable, absence de continuité dans les prolongements nerveux, répartition analogue dans le protoplasma, laissant libre la partie périphérique et le cône d'origine.

Dès la publication de la nouvelle méthode de Golgi, en 1908, j'entrepris des recherches sur le réseau interne des cellules ganglionnaires spinales de quelques Mammifères (5). Je m'aperçus bientôt que cette méthode pouvait être simplifiée avec avantage ; les meilleures préparations furent obtenues en suivant la technique de Golgi jusqu'au moment de faire les coupes et en s'arrêtant là ; le réseau apparaît alors en noir sur le fond jaune clair de la cellule et se détache nettement. Les résultats obtenus montrent les grandes analogies du réseau de Golgi avec la substance chromatophile.

I. *Analogies morphologiques.* — Le réseau de Golgi n'est un véritable réseau que dans certaines cellules, chez certains animaux. Chez le Chien, il est très contourné et fin ; chez le Chevreau, au contraire, il est remplacé dans la plupart des cellules par de gros grains irréguliers ; le Lapin, le Cobaye, le Surmulot présentent des formes intermédiaires. On trouve côte à côte des cellules d'aspect très diffé-

(1) C. Golgi, *Sur une fine particularité de structure...* (*Arch. Ital. Biol.*, t. LI, 1909).

(2) Perroncito, *Condriosomi, cromidii ed apparato reticolare interno...* (*Rend. Ist. Lomb.*, vol. XLI).

(3) R. Collin et M. Lucien, *Observations sur le réseau interne de Golgi...* (*C. R. Assoc. des Anat.*, XIe réunion, 1909).

(4) F. Marcora, *Ueber die Beziehungen zwischen dem Binnennetze und den Nisslschen Körperchen* (*Anat. Anz.*, Bd. XXXV, 1909).

(5) Je n'ai pu mettre en évidence de réseau interne chez *Helix*.

rent ; les unes sont parsemées d'une grande quantité de petits points noirs ; d'autres ont de gros grains plus ou moins effilés sur les bords ; d'autres ont un réseau ou des fragments de réseau à points nodaux renflés ; d'autres encore présentent de véritables pelotons irréguliers, tordus, parsemés de gros grains ou d'anneaux. Ces différences d'aspect ne semblent pas dues à des irrégularités d'imprégnation, mais bien à des différences réelles de structure ; certaines cellules ont un aspect sombre, des grains nombreux, un réseau dense qui font songer aux cellules sombres que montre la méthode de Nissl. La disposition des grains et des varicosités du réseau est concentrique aux surfaces nucléaire et cellulaire ; une mince zone périnucléaire est toujours respectée ; la périphérie de la cellule est également libre de toute granulation sur une épaisseur plus ou moins grande. Le cône d'origine de l'axone ne présente aucun grain et la limite de ceux-ci coïncide toujours avec celle de la substance chromatophile. Tous ces caractères, et plus encore l'aspect général des préparations, montrent une distribution identique des deux substances. Ces faits viennent d'ailleurs d'être signalés en partie par Marcora.

II. *Analogies chimiques.* — On sait que la substance chromatophile disparaît par l'action des alcalis, soit qu'ils la dissolvent (Eve, Held, Bühler, Ewing) ou qu'ils la rendent incolorable (Bethe). Il était intéressant de savoir ce que devient le réseau interne soumis à la même action. La soude ne pouvant être employée à cause de son action sur le nitrate d'argent, j'ai utilisé l'ammoniaque à 1 0/0 agissant pendant une heure soit avant, soit pendant, soit après la fixation. L'action de l'ammoniaque avant la fixation altère beaucoup les cellules, celle après la fixation est préférable. J'ai essayé cette réaction sur les ganglions spinaux du Cobaye, du Surmulot et du Lapin, le ganglion symétrique servant de témoignage de la réussite de l'imprégnation, et chaque fois, j'ai obtenu la non-coloration du réseau interne, les cellules restant d'une couleur jaune pâle homogène.

III. *Analogies physiologiques.* — Marcora a déjà fait connaître (1) les modifications du réseau interne des cellules nerveuses du noyau d'origine du grand hypoglosse consécutives à l'arrachement et à la section de ce nerf. Quatre jours après l'arrachement, le réseau paraît

(1) F. Marcora, *Di una fine alterazione delle cellule nervose del nucleo di origine del grande ipoglosso consecutive allo strappamento ed al taglio del nervo* (*Boll. Soc. Med. di Pavia*, 1908).

brisé et repoussé ainsi que le noyau à la périphérie ; le centre de la cellule est homogène. Quinze jours après l'opération, le réseau n'apparaît plus que comme un amas de petits fragments réunis par de minces et courts filaments contournés et entortillés. La section du nerf produit des lésions analogues, mais moins graves. Si l'on rapproche ces observations de celles de Nissl, Marinesco, Lugaro, Flatau, van Gehuchten, etc., faites par la méthode de Nissl, on est frappé de leur parallélisme ; les troubles commencent vers la quarantième heure et s'aggravent jusqu'au quinzième jour ; ils consistent en déplacement du noyau, désagrégation, fragmentation de la substance chromatophile qui devient granuleuse ; cette chromatolyse marche du centre vers la périphérie.

J'ai fait également deux expériences qui montrent les mêmes analogies. Avec l'aide du Dr Busquet, j'ai excité pendant trente-cinq minutes la racine postérieure d'un ganglion lombaire d'un Chien, le ganglion symétrique servant de témoin. Les différences d'aspect du réseau dans les deux ganglions sont très nettes. La plupart des cellules du ganglion témoin présentent un réseau complet, très contourné, arrivant jusqu'auprès de la surface nucléaire ; celles du ganglion excité ont un réseau plus lâche, situé seulement à la périphérie de la cellule, parfois fragmenté. Les expériences de Hodge, Vas, Lambert, Lugaro, Pugnat, Pick, etc., montrent dans les mêmes conditions une disparition de la substance chromatophile qui débute par le centre, laissant un anneau de granules localisé à la périphérie.

J'ai à deux reprises, chez un Lapin, greffé sous la peau de l'oreille, des ganglions spinaux pris à un autre Lapin, puis examiné par la méthode de Golgi et par celle de Nissl l'état de leurs cellules trois, cinq, sept, quinze, vingt et une, vingt-quatre heures après l'opération. Les modifications de la substance chromatophile et du réseau interne marchent parallèlement. Dans quelques cellules, le réseau se fragmente en petits granules vers la cinquième heure ; ce changement apparaît dans un plus grand nombre de cellules vers la septième heure, et à ce moment certaines sont déjà homogènes ; à la vingt-quatrième heure, presque toutes les cellules n'ont plus ni réseau ni grains et sont homogènes. Or, Marinesco a signalé les transformations de la substance chromatophile dans les mêmes conditions, aboutissant à l'achromatose vers la vingt-quatrième heure ; l'achromatose à la vingt-quatrième heure a été également signalée par Nageotte.

Un tel ensemble d'analogies morphologiques, chimiques et physiologiques fait penser à une identité de nature. Toutefois Collin et

Lucien ont pu voir simultanément le réseau et les corps de Nissl occupant des positions différentes dans certaines cellules, l'un étant périnucléaire, les autres périphériques. Marcora, qui a fait la même double coloration, les a vus intermédiaires, les corps de Nissl occupant les mailles du réseau interne. L'analogie des deux structures ne va-t-elle donc pas jusqu'à l'identité ?

Il est très difficile d'affirmer ou de nier l'identité de ces deux formations. J'ai pu reconnaître les faits suivants : 1° le fixateur de Golgi ne détruit pas la substance chromatophile et n'empêche pas sa coloration par la méthode de Nissl ; 2° le réseau interne ne se présente pas toujours comme un réseau, mais a fréquemment l'aspect de granulations plus ou moins effilées et liées ensemble ; 3° les doubles colorations du réseau et de la substance chromatophile montrent bien parfois des corps de Nissl à côté des granules ou des filaments argentiques, mais rien ne permet d'affirmer qu'ils sont intercalés les uns aux autres ; les gros granules argentiques apparaissent alors dans les cellules à gros corps de Nissl, les fins granules et les filaments en réseau dans les cellules à substance chromatophile poussiéreuse ou filamenteuse ; 4° il est possible que l'argent ne se précipite pas sur tous les corps de Nissl, mais qu'il agisse d'une manière inconstante comme dans beaucoup d'autres circonstances (imprégnation noire de Golgi, imprégnations neurofibrillaires).

En résumé, la méthode de Golgi ne permet pas d'affirmer l'identité du réseau interne et du réseau spongioplasmique incrusté de corps de Nissl. Mais elle ne permet pas non plus d'affirmer leur nature différente. Toutefois les grandes analogies morphologiques, le parallélisme des réactions de ces deux substances à divers agents chimiques ou physiologiques plaident fortement en faveur de la première hypothèse.

PRÉSENTATION A LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

Par Ernest LEBON

DE SON OPUSCULE INTITULÉ :

Savants du Jour :

GASTON DARBOUX, Biographie, Bibliographie analytique des Écrits

Un volume grand in-8° (28-19) de VIII-72 pages, papier de Hollande, avec un portrait en héliogravure ; Paris, Gauthier-Villars, 10 janvier 1910.

Séance du 22 janvier 1910.

J'ai l'honneur de présenter à la Société Philomathique un Opuscule contenant la Biographie de M. Gaston Darboux, membre honoraire de la Société, et la Bibliographie analytique de ses Écrits.

Dans sa jeunesse, M. G. Darboux fut un membre très assidu aux Séances, et y a fait plusieurs Communications dont les plus importantes, imprimées dans notre *Bulletin*, ont les titres suivants :

Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre (23 novembre 1872);

Sur un nouveau système de coordonnées et sur les polygones inscrits et circonscrits aux coniques (25 mai, 8 juin 1872).

Sur les surfaces orthogonales (17 février 1866) ;

Sur un mode de transformation des figures et son application à la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points (25 avril, 16 mai 1868);

Sur les polygones inscrits et circonscrits à l'ellipsoïde (23 avril 1870).

Sur les lignes asymptotiques de la surface de Steiner (12 avril 1873).

Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace (9 mars 1872);

En tête de cet Opuscule, j'ai publié une Notice où se trouvent retracée la belle carrière parcourue par notre Collègue et donnés les principaux caractères de ses intéressantes recherches. Qu'il me soit permis de rappeler ici quelques passages de cette Notice.

« M. Darboux a généralisé des questions dont des cas particuliers avaient seuls été abordés. Il a su établir des rapprochements entre des théories dont on n'avait pas encore aperçu les points communs. Il a fait faire de sensibles progrès à la solution de problèmes qui se rencontrent en analyse et en physique mathématique. Dans un important Ouvrage sur la *Géométrie infinitésimale*, dont les quatre volumes ont été publiés de 1887 à 1896, il a exposé non seulement les travaux de ses devanciers, mais encore ses recherches personnelles, qui auraient pu donner naissance à un grand nombre de Mémoires originaux... »

« Avec le même soin et la même compétence, M. Darboux a commencé en 1898, *Sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, la publication d'un Ouvrage qui complète le précédent... »

« L'ensemble de ces deux Ouvrages constitue une histoire documentée de la Géométrie infinitésimale pendant le XIXe siècle. M. Darboux a tracé les grandes lignes de cette histoire dans la Conférence qu'il a faite au Congrès des mathématiciens tenu à Rome en avril 1908. Quelques années avant, au Congrès d'Arts et de Science tenu à Saint-Louis en septembre 1904, il avait lu une Étude approfondie sur le développement de toute la Géométrie moderne. De plus, il a fourni de précieux matériaux à l'histoire des Sciences en analysant un grand nombre d'Ouvrages variés, en composant quelques Éloges et Notices historiques et plusieurs Discours qu'il a lus dans de solennelles cérémonies où il représentait l'Institut, le Gouvernement ou l'Université de Paris. Tous ces écrits donnent à M. Darboux une place importante dans le monde des lettres... »

« M. Darboux est resté simple et modeste, bien qu'il soit arrivé à une situation très élevée. Il importe de faire remarquer qu'il la doit seulement à ses efforts et à son talent : aucun de ses ascendants n'a occupé de position même modeste, dans le monde de la science, de l'administration ou de la politique ; si des savants l'ont protégé au début de sa carrière et lui ont ouvert les portes de la gloire, c'est qu'ils avaient vu dans ses travaux des points de nature à faire progresser la Science et reconnu en lui des qualités de premier ordre... »

En faisant précéder les principales Sections de mon travail d'appréciations dues à des hommes illustres, il me semble que j'y ai introduit des éléments qui font oublier la sécheresse inévitable de suites analytiques d'énumérations de titres d'écrits, bien que les titres vagues soient accompagnés de sobres explications.

C'est pourquoi j'ose me flatter d'être parvenu à composer un Ou-

vrage qui soit à la fois intéressant pour les personnes qui désirent connaître, seulement dans son ensemble, l'œuvre de M. Gaston Darboux, très utile à celles qui se livrent à des études et des recherches dans le domaine si étendu de l'Analyse pure et de la Géométrie infinitésimale.

Je crois avoir signalé tous ses écrits originaux et les principales analyses dont ils ont été le sujet. Ce n'est qu'après les avoir lus ou parcourus que j'ai donné les références et les renseignements qui s'y rapportent. On rendrait service à la Science en m'indiquant les omissions.

Il importe de faire remarquer que M. Gaston Darboux, après avoir lu mon manuscrit, a bien voulu me donner de précieux conseils pour le classement analytique des Mémoires et des Notes, et qu'il a aussi lu et approuvé la dernière épreuve d'imprimerie de cet Opuscule.

Dans la séance du 17 janvier 1910 de l'Académie des Sciences, ce livre a été signalé par le Secrétaire perpétuel M. van Tieghem et présenté en ces termes par le Président M. Emile Picard :

« Je dépose sur le bureau, de la part de M. Ernest Lebon, un Ouvrage intitulé Gaston Darboux, qui renferme une *Biographie* et une *Bibliographie analytique des Écrits* de M. Darboux. M. Lebon a entrepris de publier une série de petits volumes de nature analogue, sous le titre général de *Savants du Jour*. Déjà, il y a quelques mois, le premier volume de cette série, consacré à M. Henri Poincaré, a été présenté à l'Académie.

Dans l'Opuscule actuel, on trouvera une très intéressante biographie de notre Secrétaire perpétuel, avec une vue générale sur son œuvre scientifique. La liste des Mémoires et Ouvrages, qui ont été été distribués en sept Sections, a été établie avec un soin extrême. Leur énumération constituerait déjà un document précieux; mais M. Lebon ne s'en est pas tenu là. Il donne quelquefois un court résumé du travail mentionné, et indique les analyses dont il a fait l'objet. La Collection, dont M. Ernest Lebon vient de publier les deux premiers volumes, rendra certainement les plus grands services aux chercheurs et aux historiens de la Science. »

Je ne voudrais pas terminer cette présentation sans remercier publiquement la Commission administrative de l'Académie des Sciences d'avoir bien voulu honorer d'une importante souscription la Collection que j'ai entreprise sur les *Savants du Jour*.

Tours, imprimerie Deslis Frères, 6, rue Gambetta.

EXTRAITS DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES

Séance du 8 janvier 1910.

PRÉSIDENCE DE M. PERRIN.

Il est procédé à l'élection du vice-président, du trésorier, et des membres de la Commission des comptes. Sont nommés pour 1910 :

Vice-président : M. Hua ;
Trésorier : M. Rabaud ;
Membres de la Commission des comptes : MM. Rivet, Mayer et Léauté.

M. Perrin, président sortant, adresse des remerciements à la Société et cède le fauteuil à M. Matignon.

PRÉSIDENCE DE M. MATIGNON.

M. Matignon adresse ses remerciements à M. le Président sortant et à l'Assemblée.

M. Berthelot entretient la Société des formules fondamentales de sustentation des aéroplanes.

Séance du 22 janvier.

PRÉSIDENCE DE M. MATIGNON, PRÉSIDENT.

M. Lebon présente le nouveau volume de la Collection *Les Savants du jour*, qu'il vient de consacrer à M. G. Darboux.

M. Deschamps complète sa communication antérieure en donnant quelques exemples de l'emploi des formules qu'il a indiquées.

Séance du 12 février.

PRÉSIDENCE DE M. MATIGNON, PRÉSIDENT.

M. Terroine fait une communication sur la digestibilité des triglycérides et de différentes graisses alimentaires.

M. Matignon entretient la Société de la décomposition des molécules élémentaires.

Séance du 26 février.

PRÉSIDENCE DE M. MATIGNON, PRÉSIDENT.

M. Goutal expose une méthode personnelle et nouvelle d'extraction des gaz dissous ou occlus dans les aciers.

M. Becquerel rappelle l'ensemble de ses recherches sur la phosphorescence des sels d'uranyle.

Séance du 12 mars.

PRÉSIDENCE DE M. HUA, VICE-PRÉSIDENT

M. Nicolardot est élu dans la 2e section.

M. Legendre fait une communication sur les rapports du réseau interne de Golgi et des corps de Nissl des cellules nerveuses des ganglions spinaux.

M. Rabaud rapporte quelques observations concernant le *Larinus Leuzeæ*, parasite des *Leuzea conifera* et *Stechalina dubia*.

Séance du 19 mars.

PRÉSIDENCE DE M. ANDRÉ.

M. le capitaine Nicolardot entretient la Société de la question de l'incandescence et du chauffage par le gaz.

Séance du 23 avril.

PRÉSIDENCE DE M. MATIGNON, PRÉSIDENT.

M. Cayeux expose le but et les résultats des fouilles de Délos dont il fut chargé, et fait ressortir, à cette occasion, l'intérêt des applications de la Géologie à l'Archéologie.

Séance du 28 mai.

PRÉSIDENCE DE M. ANDRÉ.

Le Président annonce le décès de M. Raoul Perrin, membre et ancien président de la Société.

M. Guieysse expose quelques résultats des recherches encore inachevées sur la présence des mitochondries dans les cellules de l'hépatopancréas des Crustacés.

Séance du 25 juin.

PRÉSIDENCE DE M. MATIGNON, PRÉSIDENT

M. Moureu fait hommage à la Société de l'ouvrage qu'il vient de publier sous le titre : *Chimie et Physique des eaux minérales.*

M. Matignon expose la question de la production de l'hydrogène pour le gonflement des dirigeables, et cite plusieurs procédés nouveaux actuellement appliqués ou à l'étude.

Le banquet de la Société Philomathique a eu lieu le 28 février, au restaurant Champeaux.

Étaient présents : MM. D. André, Becquerel, Berthelot, Cayeux, Dongier, Fauré-Frémiet, Goutal, Henneguy, Hua, Launoy, Lecaillon, Mahler, Matignon, Mayer, Michel, Moureu, Pellegrin, Perrin.

S'étaient excusés : MM. Bourgeois, Laisant.

Au dessert, M. Matignon, président, a prononcé l'allocution suivante :

Messieurs et chers Confrères,

Chacun d'entre nous, le jour de son entrée à la Société Philomathique, prend en quelque sorte l'engagement tacite de mettre en pratique notre devise : Etude et Amitié, qui condense sous une forme lapidaire les deux devoirs du philomathe.

Dans nos séances du samedi, consacrées plus spécialement à l'étude, nous nous efforçons de remplir le premier de nos devoirs, mais nous n'oublions pas en même temps de satisfaire au second. C'est qu'en effet nos réunions se font toujours sous l'égide de l'amitié ; elles en ont tous les caractères, la simplicité, la franchise, la bienveillance et l'intimité.

A la Société Philomathique, nous ne craignons pas de dévoiler toute notre pensée, d'émettre toutes les idées qui nous traversent l'esprit sur les sujets les plus variés, et les plus éloignés de nos occupations familières ; nous savons que nos erreurs ne sont pas à redouter, car nos idées seront toujours examinées avec bienveillance dans un milieu sympathique et, quoiqu'il arrive, nous ne pourrons que profiter de la discussion pour augmenter ou préciser nos connaissances.

Aussi ne crains-je pas d'ajouter, qu'il n'existe aucune Société où les causeries aient plus d'abandon, plus d'imprévu et par conséquent plus de charmes.

Si nos séances d'études sont toujours amicales, il nous arrive cependant, une fois par an, de dissocier l'étude et l'amitié, pour sacrifier, comme ce soir, uniquement à l'amitié. Et en agissant ainsi nous remplissons le deuxième devoir de tout bon philomathe. Permettez-moi donc, puisque l'ancienneté dans ma section me confère cette année la fonction présidentielle, de vous dire à tous mes biens vifs remerciements pour votre présence à la réunion de l'amitié.

Au temps de Cicéron, c'est lui qui nous le dit, l'œuvre de l'amitié n'était considérée comme complète que lorsqu'on avait mangé ensemble plusieurs boisseaux de sel. Nous n'avons plus aujourd'hui les loisirs des Romains, et pour donner la traduction moderne de la pensée de Cicéron, nous devons ramener à de plus modestes proportions les dimensions du boisseau. Quoi qu'il en soit, c'est toujours à la chaleur communicative des banquets, chaleur communicative

bien connue, qu'il convient de venir réchauffer l'amitié. Je ne saurais donc trop engager les membres de notre Société à se réunir plus nombreux dans l'avenir et j'exprimerai le regret, comme mon prédécesseur M. Perrin l'avait fait l'an dernier, de ne voir ici qu'un nombre assez restreint de nos membres honoraires.

Notre collègue M. Mahler a pris, comme vous le savez, l'initiative de demander à un graveur de talent, M. Jacques Froment-Meurice, le projet d'une plaquette destinée aux membres de la Société. L'artiste a déjà donné une esquisse de son projet. La plaquette en bronze aurait 8 centimètres sur 7 centimètres. A l'avers, une allégorie personnifierait chacune de nos trois sections. Au revers serait représentées la place et l'entrée de la Sorbonne, avec des motifs évoquant notre devise et permettant l'inscription du nom de quelques-uns de nos aînés les plus célèbres. Il serait nécessaire, pour donner suite à l'idée de M. Mahler, qui a souri à beaucoup d'entre nous, de connaître au moins d'une façon approximative le nombre des souscripteurs éventuels. Je vous serai donc obligé, mes chers confrères, de vouloir bien faire un peu de propagande autour de vous afin de préparer un bon accueil à la circulaire-souscription qui sera adressée prochainement à tous les membres de la Société.

Messieurs, la Société Philomathique est à la veille d'entrer dans la 122e année de son existence. Pendant ce long espace de temps, les hommes éminents qu'elle a comptés dans son sein ont tenu une place importante dans la science. Comme l'a dit mon maître Berthelot, si l'on voulait résumer les découvertes qui ont été présentées à la Société, il faudrait entrer dans le vaste exposé des développements mêmes de la science au XIXe siècle.

Quel chemin parcouru depuis son origine! C'était alors le temps, par exemple, où deux de ses fondateurs, Sylvestre et Riche, auxquels s'était adjoint Vauquelin, essayaient en vain de combiner l'azote et l'oxygène sous l'influence des étincelles électriques. Aujourd'hui, l'usine suédoise de Nottoden est à la veille d'utiliser 300.000 chevaux pour réaliser couramment cette réaction et apporter à l'agriculture un supplément d'engrais nitratés.

Au milieu des transformations subies fatalement depuis sa fondation, notre Société a su conserver son caractère encyclopédique, et son objet ne s'écarte guère de celui qui lui était imposé par le règlement de 1798 : travailler au développement des sciences suivantes : l'Histoire naturelle, l'Anatomie, la Physique, la Chimie, l'Art de guérir, les Arts mécanique et chimique, l'Economie rurale et le Commerce, les Mathématiques, l'Archéologie.

La variété des communications faites dans nos séances de quinzaine témoigne que la Société Philomathique est toujours restée une véritable mutualité scientifique, où chacun d'entre nous met à profit les études des collègues des autres sections pour s'instruire dans un domaine qui n'est pas le sien. C'est encore là un des charmes de notre Société.

Avant de terminer, je suis sûr d'être votre interprète en saluant ici tout particulièrement deux de nos membres honoraires, MM. Henneguy et Desiré André. M. Henneguy est un des vaillants et des fidèles de notre Société, toujours assidu à nos séances, il nous donne à tous l'exemple du philomathe consciencieux. M. Desiré André est également un des piliers de notre groupement, son nom est dès maintenant attaché à l'histoire de la Société, et il en serait certainement le secrétaire perpétuel, si les principes égalitaires et républicains qui ont présidé à sa fondation ne s'opposaient, chez nous, à l'existence de fonctions permanentes.

Je vous propose, mes chers confrères, de lever votre verre à la vitalité de notre vieille Société Philomathique et au développement toujours croissant des liens qui unissent les philomathes.

LES CREVETTES A MALES DIMORPHES DU GENRE *SARON*

Par H. COUTIÈRE

Depuis la description de l'*Hippolyte marmoratus* Olivier et *H. gibberosus* H. M. Edwards par ce dernier auteur (1), la question a été plusieurs fois ouverte de savoir si ces deux espèces sont identiques ou distinctes. Pour ne citer que les opinions décisives, Borradaile, en 1898, se fondant sur l'examen de spécimens provenant de Rotuma (Fidji), émit l'idée qu'il s'agissait d'une seule espèce à ♂ dimorphes, tantôt *marmoratus*, tantôt *gibberosus*, alors que les ♀ sont toujours de cette dernière forme (2). Tous les autres auteurs, Thallwitz, Ortmann, Nobili, et surtout de Man, sont au contraire d'avis que les deux espèces sont distinctes. Dans ses publications de 1897 et 1902, de Man a défini avec une précision parfaite les caractères de l'*H. gibberosus*, ou, comme il est préférable de le nommer avec Thallwitz, de *Saron gibberosus* (3). Se basant sur les caractères de quelques ♂ d'Amboine, de Man montre quelles différences de forme et de dimensions des maxillipèdes externes séparent ces ♂ des spécimens *gibberosus* des deux sexes. Il rappelle à ce sujet l'opinion de Randall, qui décrit les ♀ de *marmoratus* comme possédant des maxillipèdes de dimensions moitié moindres que celles des ♂ correspondants. Les dimensions importent encore moins que la forme, remarque de Man, et les deux espèces devraient être définitivement tenues pour distinctes, s'il était démontré que ces appendices des ♀ se terminent en pointe effilée (4). Nobili (5) demande aussi à voir les ♀ *marmoratus* — non encore découvertes. — Je ne crois pas que ce désir se réalise.

Dans son travail de 1902, de Man (6) découvre, parmi les spécimens *gibberosus*, une espèce nouvelle, qui avait échappé jusqu'alors à tous les auteurs, et qu'il distingue comme *Saron neglectus*. C'est l'exis-

(1) 1837, H. M. Edwards, *Hist. nat. des Crustacés*, t. II, p. 378.
(2) 1898, Borradaile, *Proc. Zool. Soc.*, p. 1009.
(3) 1891, Thalwitz, *Dekap. Studien. — Abh. und Ber. des K. Museum Dresden*, n° 3, p. 25.
(4) 1897, De Man, *Zool. Jahrb., Syst.*, IX, p. 761, pl. XXXVI, *fig.* 68, *c*, *d*, *e*.
(5) 1906, Nobili, *Bull. Scient. Fr. et Belgique*, XL, p. 35.
(6) 1907, De Man, *Senck. Naturg. Ges.*, XXV, 3, p. 852-854, pl. XXVI, *fig.* 57-58.

tence de cette espèce qui a fait croire aux variations dans la forme du rostre et des méropodites chez le *S. gibberosus* (1). Il a été depuis longtemps démontré que l'*H. Hemprichii* Heller, de la mer Rouge, était un synonyme du *S. gibberosus*.

J'ai trouvé, dans les collections du Muséum, une série de spécimens qui me permettent des conclusions très décisives. Ce sont les suivantes :

1° La séparation spécifique du *Saron neglectus* de Man est parfaitement fondée;

2° Les *S. marmoratus* et *gibberosus* sont une seule et même espèce dont les ♂ ne sont pas à proprement parler dimorphes, mais présentent, dans le développement des maxillipèdes externes et des pattes de la première paire, des différences qui peuvent être excessives (de 1 à 10 comme volume et poids du membre);

3° Le même polymorphisme se remarque chez les ♂ du *S. neglectus*, mais paraît porter seulement sur les pattes de la première paire.

Voici quelques détails sur les spécimens étudiés :

S. marmoratus ♂ (forme *gibberosus*). — Ces ♂ ont été si complètement décrits, par de Man en particulier, qu'il est difficile d'ajouter à la sûreté de leur identification. Je remarque seulement que l'espèce porte des touffes de soies plumeuses dans les intervalles des épines médianes du côté dorsal, y compris le dernier intervalle, limité en arrière par une saillie non épineuse de la région cardiaque. Les maxillipèdes externes, toujours plus courts que le scaphocérite, sont également garnis de longues soies plumeuses, surtout dans la région de l'article médian, en deçà et au delà. Le méropodite de la deuxième paire est, sans exception, divisé en deux segments (*fig.* 1, *g* 5). Le tranchant des doigts de la pince qui termine ce membre est sur la ligne médiane, et dépourvu de spinulations. Les pattes de la troisième paire sont plus grêles que chez le *S. neglectus*, le méropodite est 7,5 fois et le propodite 12 fois plus long que large. Le dactyle porte 5 griffes à son bord inférieur, parfois 6 (*fig.* 1, *g* 7, 8).

Les pinces de la première paire ont les proportions suivantes : doigt, 1; longueur totale, 3,75-3,8; hauteur, 0,9; carpe, 2,6-2,7. La pince est contenue au moins 12 fois dans la longueur totale du corps à partir du bord postérieur de l'orbite, le rostre étant exclu.

Le carpe porte en dedans, près de son extrémité distale, une échancrure et une ligne de soies en chevron à sommet postérieur, vestige

(1) 1890, Ortman, *Zool. Jahrb., Syst.*, V. p. 497.

de l'appareil nettoyeur que j'ai découvert chez les Eucyphotes, mais dont la portion palmaire a disparu (*fig.* 1, *g* 6).

S. marmoratus ♂ (forme *marmoratus*). — Les variations par rapport au type précédent se produisent dans deux directions, qui paraissent être toujours associées. Les maxillipèdes externes s'allongent et s'atténuent, leur armature distale s'espace le long de leurs

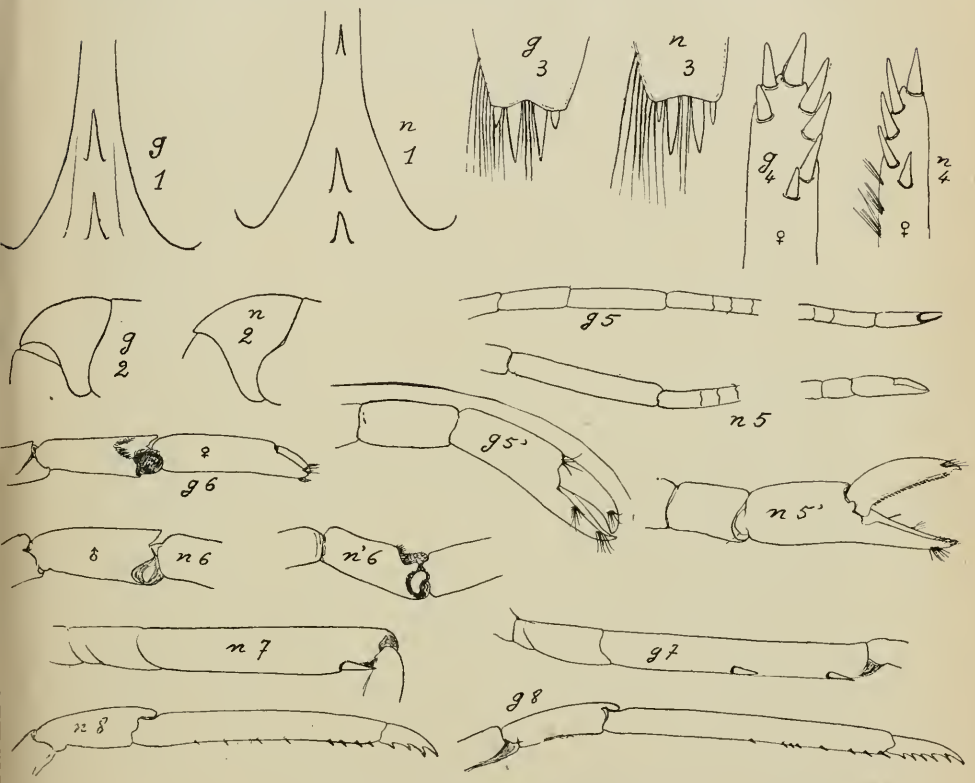


FIG. 1 (*g* = *gibberosus*, *n* = *neglectus*).

1, base du rostre ; — 2, 3e pléosomite ; — 3, extrémité du telson ; — 4, extrémité du 3e maxillipède de la ♀ ; — 5, méropodite et carpe de la 2e paire ; — 5', pince de la 2e paire ; — 6, carpe de la 1re paire. *n* 6 chez le ♂, *n'* 6 chez la ♀ ; — 7, méropodite de la 3e paire ; — 8, extrémité de la 3e paire.

extrémités, ses épines sont plus faibles, plus rares, peuvent se réduire beaucoup, jusqu'à manquer totalement. D'autre part, les pinces de la première paire, tout en conservant leurs proportions, augmentent de volume et de taille de façon démesurée.

J'ai rapporté de Djibouti un ♂ particulièrement intéressant en ce

que la variation des maxillipèdes est beaucoup plus prononcée que celle des pinces. Tandis que, chez les ♂ *gibberosus*, le segment médian de ces appendices ne dépasse pas, ou à peine, l'extrémité du carpocérite, ici, c'est l'article basal des maxillipèdes qui atteint le même niveau, et le membre dépasse le scaphocérite des 2/3 de l'article distal (*fig.* 2, 21). Le rapport entre les maxillipèdes de deux ♂ de même taille est égal à 1,65. Celui entre les pattes de la première paire n'atteint que 1,4, et 1,36 entre celles de la deuxième paire. Les pattes suivantes ne présentent plus de différences de longueur.

L'armature distale des maxillipèdes ne présente pas de différences avec celle des ♂ *gibberosus*, sauf en ce qui concerne les denticules plus faibles entre les épines mobiles. J'ai d'ailleurs vu cette même atténuation chez deux ♂ *gibberosus*, sans allongement correspondant des appendices (*fig.* 2, 11).

Les pinces de la première paire sont d'un type assez différent de la normale par le raccourcissement des doigts (*fig.* 2, 21). Ceux-ci étant pris pour unité, la longueur totale de la pince est 4,5 (au lieu de 3,8), la hauteur 0,95 au lieu de 0,9. Le carpe s'est allongé, il n'est plus contenu que 1,3 fois (au lieu de 1,44) dans la longueur de la pince. Ce spécimen est le seul que j'aie vu présenter ce mode de variation, qui n'est pas tout à fait celui aboutissant aux *marmoratus* typiques. Il se trouve parmi une trentaine de spécimens *gibberosus* parfaitement normaux.

Un exemplaire venant se placer dans le voisinage, au moins comme étendue de la variation, provient d'Hogoleu (Jacquinot) (*fig.* 2, 12). Il est accompagné de trois autres ♂ *gibberosus* normaux. Les maxillipèdes rappellent comme longueur ceux de l'exemplaire précédent, mais l'article distal se termine par une pointe conique non mobile laissant voir le processus par lequel les autres épines sont peu à peu espacées et atténuées (*fig*, 2, 14). Les pinces de la première paire sont très inégales, avec les proportions suivantes (*fig.* 2, 13) :

$$\text{doigt, 1 ; longueur totale } \begin{cases} 3,3 \\ 3,61 \end{cases} \text{ hauteur } \begin{cases} 0,9 \\ 0,77 \end{cases} \text{ carpe } \begin{cases} 1,8 \\ 2,22 \end{cases}.$$

La plus grande est contenue 7 fois dans la longueur totale ; la plus petite, 10 fois. Ni l'une ni l'autre n'ont conservé les proportions qu'elles possèdent normalement, l'une étant plus grêle, l'autre plus trapue qu'à l'ordinaire, mais leur accroissement de taille est surtout à noter.

L'existence de spécimens tels que ceux qui précèdent suffirait à

montrer le peu de stabilité de l'espèce *gibberosus*, en même temps que la naissance des caractères *marmoratus*. Ces derniers vont maintenant s'accentuer.

Sur 7 spécimens de Tongatabu (Quoy et Gaymard), 6 sont des *gibberosus* typiques (4 ♀, 2 ♂), le septième est un ♂ franchement

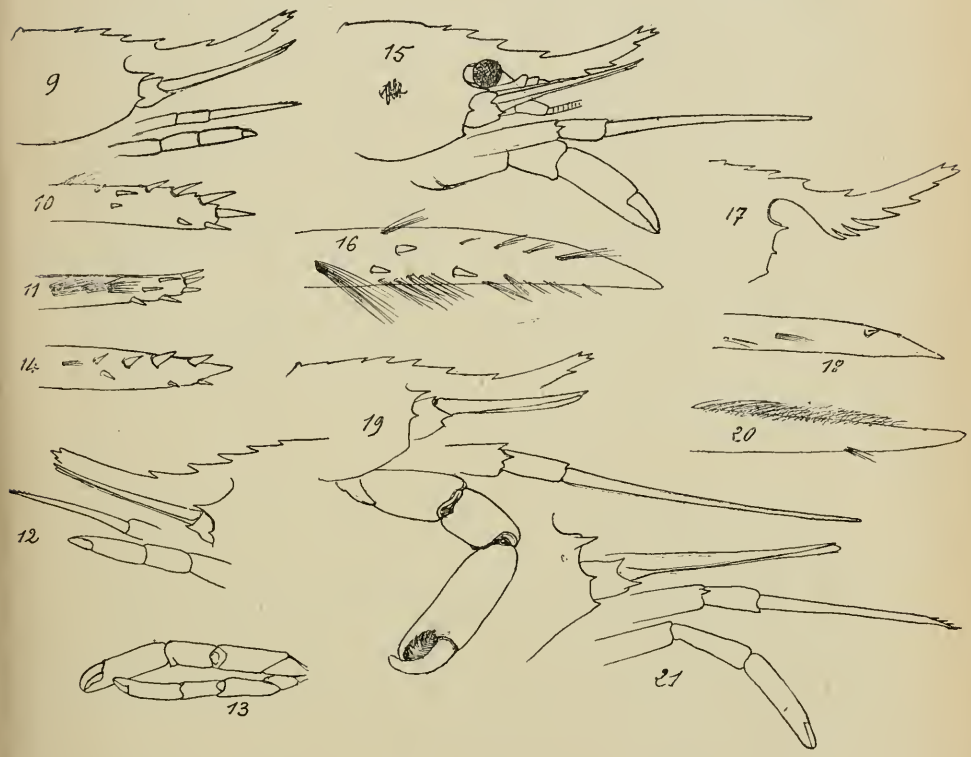


FIG. 2.

9, ♂ typique de *S. gibberosus* (Djibouti); — 10, extrémité du maxillipède; — 11, autre forme du maxillipède chez certains ♂ *gibberosus*; — 12, ♂ provenant d'Hogoleu; — 13, pinces de la 1re paire du même ♂; — 14, *Id.*, maxillipède; — 15, ♂ *marmoratus* (type de H. M. Edwards); — 16, *Id.*, maxillipède; — 17, *Id.*, rostre; — 18, maxillipède d'un ♂ *marmoratus* de Viti; — 19, grand ♂ *marmoratus* de Fidji; — 20, maxillipède; — 21, ♂ aberrant de Djibouti.

marmoratus. Une seule des pinces de la première paire est présente, elle est contenue 5 fois dans la longueur totale, et ses proportions sont : doigt, 1 ; longueur totale, 2,7 ; hauteur, 0,83. Comme dans le spécimen précédent, les doigts de la pince deviennent volumineux, le doigt mobile se courbe en demi-cercle ; son opposé prend un tubercule obtus, ils deviennent béants et leur intervalle se garnit

de soies serrées. Le volume des doigts entraîne celui de la portion palmaire, où sont contenus leurs muscles moteurs, et le rapport de la longueur totale à leur longueur propre diminue progressivement à mesure qu'augmente le volume du membre. De même, le rapport de la longueur de la pince à celle du carpe, qui est de 1,44 chez les ♂ *gibberosus*, monte à 1,83 chez le spécimen d'Ilogoleu, à 2,4 chez celui de Tongatabu, cet article ne suivant pas l'accroissement de la portion distale du membre. Il en est de même du méropodite.

Quant aux maxillipèdes externes, l'article basal est énorme, il atteint l'extrémité du carpocérite; l'article distal dépasse le scaphocérite de toute la longueur de celui-ci. Enfin, ces appendices se terminent en pointe et ne portent aucune épine. Ils répondent à la forme que de Man considère comme typique pour *Saron marmoratus* et qui, en réalité, se relie par les transitions les plus ménagées à celle de *gibberosus*.

Le type de H. M. Edwards (*fig.* 2, 15), très bien conservé, est des plus instructifs à cet égard. Il diffère peu du précédent, mais les deux pinces de la première paire sont présentes. Elles sont très symétriques, contenues 5,5 fois dans la longueur totale, et leurs proportions sont les suivantes :

$$\text{doigts, 1; longueur totale, 2,73; hauteur, 0,9; } \frac{\text{longueur totale}}{\text{carpe}} \text{. 2,2.}$$

Les maxillipèdes externes, semblables comme longueur à ceux du spécimen précédent, sont très remarquables par leur armature (*fig.* 2, 16). Ils s'effilent en une pointe conique obtuse, régulièrement atténuée et portant des bouquets de soies presque jusqu'à l'extrémité. On y découvre de plus trois petites épines répondant aux dernières de la série normale, mais très espacées. Rien ne saurait mieux mettre en évidence le mode acrogène de l'allongement des maxillipèdes et le mécanisme de la disparition graduelle des épines.

Il ne manque vraiment aucun terme à cette disparition. Sur un beau spécimen de Viti, où les pinces ont le même volume que chez le type, les deux maxillipèdes sont inégaux, l'un paraît avoir été cassé et s'être cicatrisé en pointe mousse, le second s'atténue en pointe conique, mais porte encore une épine (*fig.* 2, 18).

Des îles Fidji (Filhol) sont quelques spécimens très intéressants. Deux ♂ sont des *gibberosus*, s'écartant toutefois de la normale par les pinces de la première paire déjà volumineuses. Elles sont

égales chez l'un, contenues 7 fois dans la longueur du corps, asymétriques chez le second, où la plus grande est semblable à celles du précédent. Les maxillipèdes externes sont un peu anormaux également, en ce qu'ils atteignent l'extrémité du scaphocérite.

Sur un autre ♂, les maxillipèdes dépassent cette longueur du tiers de leur article distal, et l'extrémité est déjà notablement atténuée, *surtout sur l'un des deux appendices*. Les pattes de la première paire manquent.

Enfin, le dernier spécimen est le seul que j'aie vu répondre rigoureusement à la description de de Man relative à *marmoratus* (description non conforme au type, ainsi qu'on l'a vu), en ce que les maxillipèdes sont absolument dépourvus d'épines (*fig.* 2, 20). Ils sont d'une longueur démesurée, leur article distal ayant à lui seul 1,7 fois la longueur du rostre. Les pinces de la première paire sont énormes également, un peu asymétriques. La plus grande est contenue un peu moins de 4 fois dans la longueur totale, et leurs proportions sont les suivantes (*fig.* 2, 19) :

$$\text{doigts, 1 ; longueur totale} \begin{cases} 2{,}7 \\ 2{,}6 \end{cases} \text{hauteur} \begin{cases} 0{,}53 \\ 0{,}83 \end{cases} \frac{\text{longueur totale}}{\text{carpe}}, 2{,}6$$

Si l'on remarque que les plus grands ♂ du type *gibberosus* mesurent 37 millimètres et le plus grand *marmoratus* 39 millimètres (sans le rostre), alors qu'en considérant une seule dimension, la longueur, celle du maxillipède entier et celle du membre entier de la première paire passe de 1 à 2, 5 environ, il sera difficile de trouver un exemple plus étendu des variations dans les caractères sexuels secondaires d'une espèce. Le rapport des poids du membre de la première paire, dans les deux spécimens cités, est égal à $\frac{146^{mg}}{15{,}3^{mg}} = 9{,}5$.

Saron neglectus de Man est parfaitement distinct de l'espèce précédente. Je rappelle ici les différences énumérées par de Man : rostre généralement plus court, dents terminales plus rapprochées, hauteur plus grande de la lame rostrale, base brusquement élargie, non sillonnée latéralement, bord du quatrième pléosomite régulièrement courbé en S quand on le regarde de côté, pince de la deuxième paire avec un bord coupant serreté, la paume égale en longueur aux doigts, légèrement plus longue que le carpe, une seule épine sur les méropodites des troisième et quatrième paires de pattes (*fig.* 1, *n* 1, *n* 2, *n* 5', *n* 7).

Je crois pouvoir ajouter les remarques suivantes :

Les maxillipèdes externes sont différents comme armature distale, ceux de *S. neglectus* sont moins larges à l'extrémité, leurs épines plus faibles et généralement moins nombreuses (*fig.* 1, 4). Les pinces de la première paire ont des proportions différentes, les doigts étant plus courts : doigts, 1 ; longueur totale, 3,9 à 4 ; hauteur, 1 à 1,07. Le carpe ne porte plus d'appareil nettoyeur (*fig.* 1. *n* 6), au moins chez les ♂.

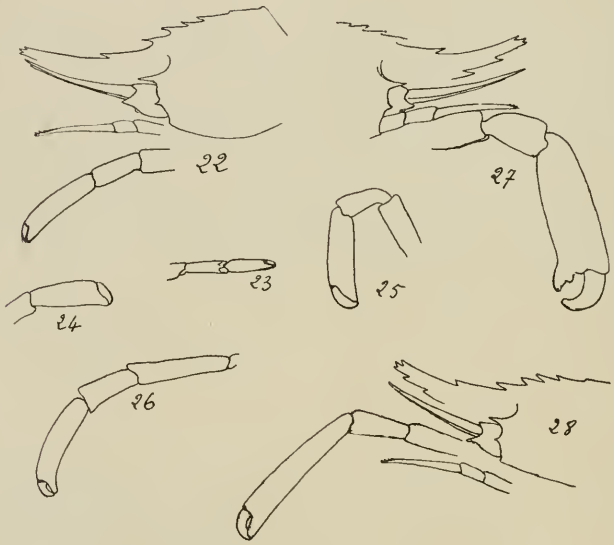


Fig. 3.

22, ♂ *neglectus* ; — 23, pince de la 1re paire d'une ♀ de même taille ; — 24, 25, 26, pinces de la 1re paire de ♂ *neglectus* ; — 27, ♂ *neglectus* de Madagascar ; — 28, ♂ *neglectus* de Nouvelle-Calédonie.

Sur la deuxième paire, le méropodite est indivis et, si le bord coupant de la pince est serreté, il est aussi tout à fait latéral au lieu d'être médian comme chez le *S. gibberosus* (*fig.* 1, *n* 5, *n* 5').

Les pattes des paires suivantes sont plus robustes, y compris le dactyle, qui a le plus souvent 3-4 griffes surnuméraires, alors qu'on en trouve d'ordinaire 5 chez le *S. gibberosus* (et même 6). Le méropodite est 5,6 fois plus long que large, et le propodite 7,5 fois (*fig.* 1. *n* 7 et 8). Le telson est un peu plus échancré à son bord postérieur (*fig.* 1, 3).

Les ♀ présentent encore un vestige de l'appareil nettoyeur sur le carpe de la première paire. A part les caractères des pleurons abdo-

minaux et des pléopodes, c'est la différence sexuelle la plus marquée d'avec les ♂ normaux *neglectus*.

Parmi les trois ♂ que j'ai rapportés de Djibouti, un se montre nettement aberrant par le volume d'une pince. Elle mesure 1/8 de la longueur totale (rostre toujours exclu) au lieu de 1/10 et même 1/12 chez les ♀ (les deux autres ♂ n'ont plus leurs pinces). L'appendice dépasse le rostre en avant. Son opposé atteint seulement la longueur du rostre. Les proportions des pinces sont les suivantes :

$$\text{doigts, 1 ; longueur totale } \left\{ \begin{matrix} 5{,}6 \\ 6{,}75 \end{matrix} \right. \text{ hauteur } \left\{ \begin{matrix} 1{,}25 \\ 1{,}37 \end{matrix} \right.$$

La brièveté des doigts étant encore beaucoup plus marquée que chez les ♀, vis-à-vis du *S. gibberosus* (*fig.* 3, 22, 23).

De Madagascar, une série intéressante, due, comme celle du *S. gibberosus*, à M. A. Grandidier, comprend trois ♀ et quatre ♂. De ces derniers, l'un n'a pas de pinces, le second n'en possède qu'une seule, contenue 5 fois dans la longueur totale et remarquable par l'allongement de la paume et du méropodite. Elle a pour proportions (*fig.* 3, 26) : doigts, 1 ; longueur totale, 6 ; hauteur, 1, 12. Le méropodite paraît suivre toujours l'allongement de la pince, le carpe demeurant court. Les maxillipèdes restent de longueur normale.

Un autre ♂ est pourvu aussi d'une seule pince, notablement plus grande, puisque contenue seulement 4,3 fois dans la longueur totale, avec des proportions plus massives : doigts, 1 ; longueur totale, 4, 7 ; hauteur, 1, 3 (*fig.* 3, 25).

Enfin, un dernier spécimen, très entier, est pourvu de deux pinces énormes, contenues 2,8 fois seulement dans la longueur totale (*fig.* 3, 27). Leur volume rappelle celui des *S. marmoratus* les plus typiques, mais leurs proportions sont bien différentes : doigts, 1 ; longueur totale, 4,7 ; hauteur, 1, 25 (au lieu de 1 ; 2, 7 ; 0, 93 chez les *S. marmoratus* de Fidji). La brièveté des doigts et la forme étroite de la paume restent les caractéristiques de l'espèce, aussi clairement que chez les specimens normaux.

De Nouvelle-Calédonie (M. Balansac), j'ai examiné une ♀ et deux ♂, ces derniers pourvus chacun d'une seule pince. Celle-ci est contenue 4, 5 fois dans la longueur totale chez un des ♂ ; 2,6 seulement dans l'autre, et cette dernière pince (*fig.* 3, 28) est remarquable par son allongement : doigts, 1 ; longueur totale, 7,3 ; hauteur, 1, 2, alors que la première, où ces chiffres sont 1 ; 3, 8 ; 1, est de proportions normales. Ici encore, le méropodite égale la pince

en longueur, et les maxillipèdes externes sont restés normaux.

Non seulement les deux espèces sont bien distinctes, mais les ♂ de chacune d'elles évoluent dans des directions différentes, accentuant les différences initiales.

Les propositions que j'énonçais au début sont donc, je crois, amplement démontrées par les séries si graduées de spécimens qui viennent d'être énumérées.

Les deux exemples fournis par les espèces du genre *Saron* font immédiatement penser aux cas de dimorphisme des ♂ que G. Smith, en particulier, a très complètement étudiés chez les Inachidés et les Tanaïdés de Naples (1).

On sait que ce dimorphisme, suivant l'excellente définition de Smith, consiste en une relation quantitative entre la taille et le degré de développement des caractères sexuels secondaires. Ce rapport est plus élevé chez les ♂ de grande taille, par suite du développement exagéré des appendices ou autres parties du corps considérés comme supports desdits caractères.

Si l'espèce ne s'accroît plus après la puberté, ce qui est le cas des Insectes, le dimorphisme est dit par Smith définitif, et facultatif dans le cas des Crustacés, dont la croissance continue à travers un nombre de mues plus ou moins élevé.

Chez les *Inachus mauritanicus* et *thoracicus* par exemple, on distingue :

1° Des *low* ♂ devenus mûrs de très bonne heure, sans doute par des conditions favorables de la vie larvaire, et montrant par suite de façon précoce la forme renflée des pinces de la première paire. Mais, comme il faut choisir entre la reproduction et la croissance, ces ♂ devront, pour accroître leur taille, passer par un état de :

2° *Middle* ♂, dont les pinces plates et faibles rappellent celles des ♀. Ils sont alors, comme dit Smith, dans un état de semi-hermaphrodisme, leurs glandes génitales sont très réduites et non-fonctionnelles. Puis, une plus grande taille atteinte, les glandes génitales peuvent reprendre leur activité et une mue subséquente amène les spécimens à l'état de

3° *High* ♂ dont les caractères sexuels secondaires, les pinces en particulier, sont aussi développés que possible.

Quand on dresse une courbe de fréquence des spécimens à pinces renflées, les « middle ♂ » étant exclus, en portant les tailles en

(1) 1905, G. Smith, *Mitt. Zool. St. Neapel*, Bd. 17, H. 3, p. 312-339.

ordonnées et le nombre des ♂ en abscisses, cette courbe est très nettement bimodale. Chez *Inachus scorpio*, ses sommets sont respectivement à 13 et 22 millimètres (longueur du céphalothorax) Quand on dresse cette courbe pendant la saison génitale, au milieu de l'été, les ♂ moyens y font presque défaut, alors qu'ils sont la majorité en hiver.

Il existe chez les Oxyrhynques au moins un autre cas qui me semble tout à fait comparable. C'est celui de l'*Eurypodius Latreillei* Guérin que j'ai signalé des 1900 (1). Miers, à vrai dire, avait distingué dans cette espèce deux variétés α et β, la première à pinces plates, la seconde à pinces renflées. J'ai montré que la prétendue variété β correspondait seule aux ♂ normaux, les ♂ α étant des individus « féminisés » montrant un « hermaphrodisme virtuel ». Les *Eurypodius* que je mesurai provenaient de l'expédition de la Romanche. Les glandes génitales n'en furent pas examinées, je remarquai seulement que ces ♂ féminisés se rapprochaient encore des ♀ par un curieux détail, à savoir le revêtement de corps étrangers plus abondant que celui des ♂ à fortes pinces. La courbe de fréquence ne pourrait être que très imparfaitement bimodale, les petits exemplaires étant mal représentés dans les matériaux que j'ai mesurés et le nombre total d'exemplaires trop faible (43). Il est visible que les mâles α, que j'ai désignés par des termes si voisins de ceux de Smith, correspondent aux « middle ♂ » des *Inachus*

Je serai moins affirmatif pour les ♂ de *Palemon lar* Fabr. J'ai rassemblé les diverses mensurations données par les auteurs, et les miennes propres, en un graphique. Sur les spécimens très grands, la courbe de croissance des pinces de la deuxième paire s'éloigne très rapidement de celle du corps, et il y a, d'autre part, des spécimens « féminisés » chez lesquels les pinces sont trop courtes relativement au corps (2). L'ensemble peut s'interpréter comme « low », « middle » et « high » ♂, mais, comme les glandes génitales n'ont pas été examinées, que des spécimens avec des pinces en voie de régénération peuvent paraître « féminisés », comme les pinces des très grands ♂ ont un aspect sénile dû aux tubercules et aux épines émoussés, je ne sais si le cas de *P. lar* doit être rapproché de celui des Inachidés ou de celui des *Saron*.

Chez *Gnathia maxillaris*, d'après G. Smith, il y aussi parmi les ♂ fertiles des spécimens « low » et « high ». Ils présentent des diffé-

(1) 1900, H. Coutière, *Bull. Mus. H. Nat.*, VI, p. 240.
(2) 1901, H. Coutière, *Ann. Sc. Nat.*, XII, p. 296, pl. XII, *fig.* 26-28.

rences de taille énormes (1 à 8 millimètres), et leur courbe de fréquence, au temps de la reproduction, est bimodale. De plus, vers la taille de 4 millimètres, se trouverait, pour les larves donnant naissance à des ♂, une période critique de croissance, certaines d'entre elles n'arrivant jamais à être pubères. Elles représenteraient assez bien les « middle ♂ », dont l'état peut être interprété comme une sorte de régression vers l'état larvaire, mais les ♂ de *Gnathia* cessent de croître après la puberté, et le dimorphisme est définitivement acquis.

Après avoir dégagé la laborieuse synonymie de *Leptochelia dubia*, — dont F. Muller avait déjà signalé les ♂ dimorphes, — G. Smith montre que le rapport entre les longueurs extrêmes du corps (2 à 4 millimètres) est beaucoup moindre que celui entre les dimensions extrêmes des pinces (0mm,1 à 0mm,7). Ici encore, les ♂ cessent de croître après la puberté, et il n'est pas question de « middle » ♂; la période qui pourrait leur correspondre se passe pendant la vie larvaire.

G. Smith (2), étudiant à Naples deux Orchesties, *O. gammarellus* et *O. Deshayesi*, a trouvé chez ces espèces une preuve très remarquable de la dégradation sexuelle qui sépare les périodes d'activité : en novembre, plus de la moitié des ♂ de *O. Deshayesi*, de toutes tailles, montrent des œufs dans leurs testicules, ce qu'on ne trouve jamais au moment de la saison d'été, où ces glandes fonctionnent activement. *O. gammarellus* se comporte de même et, de plus, en certaines localités favorisées, où la reproduction ne subit pas de temps d'arrêt (les ♀ s'y montrent toujours ovées), les ♂ ne montrent jamais d'hermaphrodisme.

Barrois a montré, chez l'*O. Deshayesi*, une énorme variation du volume de la pince du ♂ (deuxième gnathopode). Mais il s'agit ici du passage de l'état immature à l'état de maturité et non plus de variations entre ♂ adultes (1). G. Smith ne parle pas de ce détail en relatant l'hermaphrodisme temporaire de l'espèce.

G. Smith tire de ces faits, comme de ceux relatifs à la castration parasitaire, des conclusions extrêmement ingénieuses et convaincantes sur les différences réelles entre les sexes et sur les véritables effets de la castration. Celle-ci ne produit pas des résultats comparables dans les deux sexes. Si elle atténue les caractères sexuels secondaires chez les ♀, jamais elle ne fait apparaître chez celles-ci les caractères du sexe opposé, alors que c'est là chez les ♂ un résultat

(1) 1906, G. Smith, *Fauna und Flora Neapel.*, 29, Rhizocephala.

(2) Reproduit dans A. Patience, *The Glasgow natur.*, t. 4, p. 124, *fig.* 4-6, 1909. Voir aussi : E. W. Sexton, *P. Z. S. London*, p. 849, 1909, avec bibliographie très complète.

constant, pouvant aller jusqu'à l'hermaphrodisme complet. Depuis, Pott a confirmé ces faits chez les Pagures. Smith arrive, en suivant ces déductions jusqu'à leurs conséquences ultimes, à se demander si toutes les espèces hermaphrodites ne sont pas constituées uniquement par des ♂ (d'où la protandrie si fréquente), mâles dont la dégradation, par le parasitisme ou la fixation, a consisté à prendre par surcroît le sexe ♀. Il pense, en outre, que le développement du sexe et des caractères sexuels secondaires, indépendants dans une large mesure, doivent être l'un et l'autre fonction d'un troisième facteur, d'ordre chimique, qui ferait la matière vivante des deux sexes originellement différente et lui imprimerait par suite la manière propre de se comporter. C'est une hypothèse très plausible, contre laquelle il n'est guère d'objections que celle, fondamentale, de sa preuve (1).

Les autres cas de dimorphisme cités par Smith sont ceux d'*Orchestia Darwini*, d'après F. Müller, insuffisamment prouvés, et ceux tirés des Insectes, d'après Bateson et Brindley (*Forficula auricularia*, *Xylotrupes gideon*, *Lucanus cervus* et beaucoup d'autres espèces chez lesquelles les caractères sexuels secondaires des ♂ sont très marqués). Il faut remarquer qu'il s'agit ici de dimorphisme définitif et que la courbe de fréquence est tantôt unimodale, tantôt bimodale.

Chez les Crustacés, il faut encore citer le cas classique des *Cambarus*, rapporté par Hagen et surtout par Faxon. Mais, ici, les ♂ ne sont pas « low » et « high » mais bien « middle » et « high », c'est-à-dire qu'ils présentent ou non leurs caractères sexuels secondaires, suivant les périodes.

Peut-être trouverait-on aussi chez les *Cambarus* des « low ♂ » dans les premiers temps du fonctionnement sexuel, comme chez les *Inachus*.

Récemment, Wollebœck (2), étudiant *Pandalus annulicornis*, a trouvé chez les ♂ de cette espèce deux aspects des pléopodes, rappelant d'assez près le cas des *Cambarus*. Il s'agit de l'*appendix masculina* du premier et du deuxième pléopodes qui est tantôt long et rigide, tantôt très court, ridé et inconsistant. Ce dernier cas s'observe toujours chez des ♂ de grande taille et coïncide avec des testicules réduits. Il se peut que ces ♂ soient des « middle ♂ » et récupèrent plus tard leur condition, en grandissant encore, car on connaît des spécimens, rares à la vérité, d'une taille bien supérieure.

Le cas des *Saron* n'est en réalité comparable à aucun des précédents. On n'y saurait distinguer ni « low », ni « middle » ♂. Tous

(1) Smith l'a fortifiée depuis en étudiant le mécanisme de la castration chez les *Inachus* sacculinés (*Quat. J. of. micr. Sc.*, 54, 4, p. 577, 55, 2, p. 225, 1910).

(2) 1908, Wollebœck, *Bergen Mus. Aarborg*, 12, p. 65-67, *fig.* 5-6.

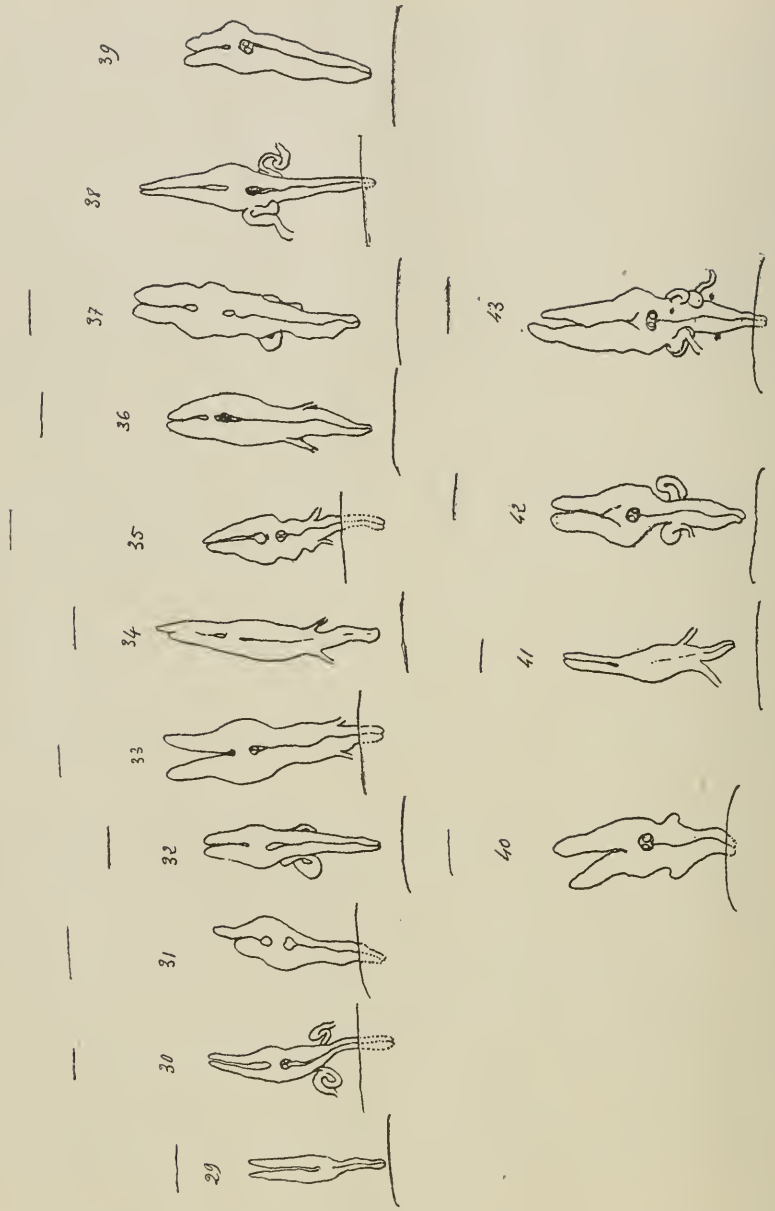


FIG. 4.

29, 32, 33, 34, 36, 37, se rapportent à des ♂ *gibberosus* de Djibouti; — 30, à un ♂ *gibberosus* de Fidji; — 31, à un ♂ aberrant de Djibouti (*fig.* 2, 21); — 38, ♂ *marmoratus* de Viti; — 35, 39, ♂ *marmoratus* de Fidji; — 40, 42, 43, ♂ *neglectus* à pinces un peu anormales; — 41, ♂ *neglectus* à très grandes pinces de Madagascar.

les spécimens de petite taille et la majorité des ♂ adultes ont des pinces et des maxillipèdes réduits, comme ceux des ♀, mais il s'y mêle, d'une façon qui paraît tout à fait accidentelle et déréglée, des ♂ chez lesquels ces appendices présentent des degrés très variables de gigantisme. Cette absence de règle, à la fois dans la fréquence des deux sortes de spécimens et dans les attributs de ceux qu'on pourrait qualifier de « high », me paraît être une présomption que les collections que j'ai étudiées représentent suffisamment, en raccourci, les proportions réelles des uns et des autres dans la nature.

La différence dans la position du problème, comparé au cas des *Inachus*, a fait que j'ai examiné le plus grand nombre des spécimens au point de vue des glandes génitales. Malgré un séjour en alcool qui dépasse un siècle pour certains, ces organes sont assez bien conservés pour qu'il soit d'ordinaire facile de les découvrir et de les dessiner en place. Les résultats de cet examen, assez inattendus, accentuent encore les divergences entre les deux cas. Tous les ♂ dont les maxillipèdes et les pinces sont réduits, et semblables à ceux des ♀, possèdent des glandes génitales normales. Elles s'étendent en avant jusqu'à la seconde épine de la rangée dorsale médiane, en arrière jusque dans le second pléosomite, avec des canaux déférents souvent contournés et volumineux à l'origine.

Mais, sur les spécimens à pinces et maxillipèdes du type *marmoratus*, on trouve régulièrement des testicules réduits. Autant que l'on peut en juger par le simple examen macroscopique, le développement de ces glandes paraît inversement proportionnel à celui des appendices « géants ». J'ai réuni sur une même ligne (1) tous les dessins, afin de rendre la comparaison plus facile et plus frappante (*fig.* 4). Il est aisé de voir que les testicules des spécimens 35, 38 et 39 sont plus petits que les autres, en comparaison de la taille des spécimens, et que le plus réduit de tous est celui du spécimen 39, un très grand ♂ de Fidji avec des pinces et des maxillipèdes démesurés.

Les résultats ne sont pas moins nets en ce qui concerne *S. neglectus*. Tous les ♂ que j'ai examinés présentaient des pinces majorées à des degrés divers par rapport à celles des ♀, mais le spécimen n° 41, dont les pinces sont énormes, a des glandes très réduites (*fig.* 3, 40-43).

Cette relation n'est visible qu'aux extrémités des séries, malheureusement trop peu nombreuses ; les spécimens qui montrent seule-

(1) Les traits horizontaux indiquant la longueur du cephalothorax (rostre exclus), ne sont pas venus sur les croquis 38, 39. A l'échelle de ces figures, ils doivent être distants de 51 et 57^{mm} respectivement.

ment une légère exagération dans la taille de leurs appendices ont des glandes de volume normal. Il me semble que l'on peut interpréter cette relation comme un caractère de sénilité (1) ; les individus qui les possèdent sont parvenus au terme de leur âge. C'est bien encore une forme de l'antagonisme entre la reproduction et la croissance, mais tout autre que chez les Inachidés. J'étais déjà arrivé à cette conception d'un aspect sénile chez les très grands spécimens de *Palemon lar*, et il me semble que cette notion devrait être envisagée plus fréquemment.

Si dans la nature peu d'individus meurent de vieillesse, beaucoup certainement arrivent à un âge avancé avant de rencontrer la mort, sous forme d'un estomac ou d'un milieu hostiles. La sénilité peut ne pas se traduire par un caractère marquant, mais quand elle le fait, l'exception n'est pas plus insolite que les cas de dimorphisme présentés par les Inachidés.

Un autre ordre de considérations rend très intéressant le problème que posent les Hippolytidæ à ♂ polymorphes. C'est la parenté certainement très grande qui les unit aux Alpheidæ, et le fait que le grand volume des pinces, exceptionnel chez ceux-là, est la règle chez ceux-ci. Je rappelle qu'il existe chez les *Saron* un détail dont j'ai le premier fait ressortir la singularité, bien qu'il ait été noté par Sp. Bate chez les *Nauticaris*, extrêmement voisins des *Saron*.

Le sixième pléosomite présente une paire de pièces triangulaires articulées, occupant la place des pleurons. Il n'est, je crois, qu'une explication plausible de ce rare caractère : c'est le vestige d'une disposition présente chez les Lophogastridæ, où le sixième pléosomite est double ainsi que ses pleurons. Quoi qu'il en soit, il n'est présent, à part les *Saron*, que chez les Alpheidæ, et précisément chez ceux qui rappellent le plus étroitement les Hippolytidæ (*Athanas*, *Betæus*). Tous les *Athanas* présentent un dimorphisme sexuel, les pinces des ♂ étant plus volumineuses ; assez faible chez l'*A. nitescens* de nos côtes, ce dimorphisme atteint un degré extrême chez l'*A. dimorphus* Ortmann, dont les ♂ portent en avant d'eux d'énormes pinces, repliées en partie sous le corps. Les pinces de beaucoup d'*Athanas*, de *Betæus æquimanus*, rappellent tout à fait celles des *Saron* et des *Alope:* même aspect dépoli, même forme

(1) Il arrive qu'elle se présente chez des spécimens qui ne sont pas les plus grands (sp. 41 de *S. neglectus*), mais la taille et l'âge ne sont pas forcément liés, la vie larvaire peut créer des différences très notables, se maintenant en grande partie par la suite. L'expérience de l'élevage du Homard américain l'a montré très nettement.

du carpe, même armature de saillies et de soies. Les maxillipèdes épineux des *Saron* et des *Alope* se retrouvent chez *Synalpheus*, les maxillipèdes de *S. neglectus* sont ceux de la plupart des Alpheidæ, leur développement excessif se retrouve chez *Automate*. Et je laisse de côté le fait que la réduction du rostre, très générale chez les Alpheidæ où elle va jusqu'à sa disparition, est en pleine réalisation, si l'on peut dire, chez les Hippolytidæ. On y trouve tous les degrés, depuis les *Saron* où les indentations exagérées du rostre indiquent sa décadence, jusqu'aux *Ogyris* où il est plus réduit même que chez les Alpheidæ tels qu' *Athanas*.

Il n' est pas jusqu'à l'asymétrie des pinces qui n'ait tendance à se montrer chez les *Saron*, aussitôt que les membres deviennent volumineux.

Si l'on suppose qu'à un moment donné l'ensemble des Eucyphotes ne comportait pas d'Alpheidæ, on pourrait comprendre la différenciation de cette famille, á partir des Hippolytidæ, par le mécanisme que l'on voit actuellement en activité chez les *Saron*. La tendance au volume exagéré des pinces de la première paire, très marquée chez ces formes, mais freinée, semble-t-il, par l'activité sexuelle, au point de ne pouvoir se manifester que lorsque celle-ci s'éteint, cette tendance se serait étendue aux deux sexes, bien qu'inégalement, et se serait manifestée de façon précoce, sans interférer avec la reproduction.

Beaucoup de Décapodes présentent, à côté d'espèces nageuses à pattes grêles, des formes lourdes, d'allure rampante. Tels sont les *Palemon* vis-à-vis des *Léander*, les *Pontonia* vis-à-vis des *Corallio-caris*, les Sténopidés vis-à-vis des Pénéides, et, bien que la distance soit beaucoup plus grande, le groupe des *Astacura* vis-à-vis des mêmes Pénéides. Le problème de leur différenciation se pose comme celui des Alpheidæ et les mêmes explications peuvent être valables. Le groupe entier des Décapodes montre cette tendance à la « céphalisation », qui réduit l'abdomen et fait prédominer une paire de membres préhenseurs à portée des organes des sens. Or, à mon sens, les Macroures Eucyphotes effectuent en raccourci, pour leur propre compte, la même évolution, qu'on peut surprendre dans la plupart des familles du groupe et dont l'ensemble Hippolytidæ-Alpheidæ montre l'image la plus parfaite. Et si cette évolution est très loin d'avoir l'ampleur de celle qui a fait un Homard d'un Pénéide, elle est proportionnelle à l'importance même du groupe des Eucyphotes, rameau latéral du tronc des Décapodes ayant épuisé, beaucoup plus rapidement que ce tronc même, ses « possibilités » évolutives.

SUR LA DISSOCIATION DE LA MOLÉCULE D'IODE ;

Par Camille MATIGNON.

V. et C. Meyer(1) ont attiré depuis longtemps l'attention sur les variations que présentent les densités du chlore, du brome et de l'iode aux températures élevées. L'étude de ces variations a été reprise, d'une façon approfondie dans le cas de l'iode, par MM. Crafts et Meier(2) et par M. Troost(3) .

Il résulte de leurs recherches, que la densité de l'iode diminue progressivement à partir de 600° à 700° pour atteindre au delà de 1.500° une nouvelle valeur constante, moitié de la précédente(4). En outre, pour une même température, la densité diminue en même temps que la pression. Ces faits reçoivent une interprétation rationnelle en admettant que la molécule d'iode diatomique se dissocie à partir de 700° en iode monoatomique. La dissociation est complète sous la pression atmosphérique au delà de 1.500°. Entre 600° et 1.500°, la vapeur d'iode est constituée par un mélange de deux vapeurs, l'iode monoatomique et l'iode diatomique.

Si l'examen des faits expérimentaux conduit un grand nombre de chimistes à considérer la dissociation de la molécule d'iode comme un fait bien établi et indiscutable, il en est un grand nombre d'autres qui ne voient là qu'une simple hypothèse et non une réalité.

Il est cependant facile d'apporter d'autres preuves de cette décomposition certaine de la molécule d'iode.

$$I^2 \gtrless 2\,I.$$

Le passage de l'iode diatomique à l'iode monoatomique se fait avec augmentation de volume ; il en résulte, d'après la loi du déplacement de l'équilibre, qu'une diminution de pression à température constante doit favoriser la dissociation et par suite conduire à une densité plus faible, conséquence en parfait accord avec les résultats des expériences de M. Troost.

(1) *Berichte*, p. 394 ; 1880.
(2) *Berichte*, p. 1010 et 1103 ; 1880 : — *Comptes rendus*, t. XCII, p. 39 ; 1881.
(3) *Comptes rendus*, t. XCI, p. 54 ; 1880 ; et t. XCV, p. 30 : 1882.
(4) Voir aussi : Biltz et Meyer, *Berichte*, t. XXII, p. 725 ; 1889.

Il est possible de vérifier quantitativement une autre conséquence de la décomposition de la molécule d'iode. La dissociation se traduit par l'équation chimique :

$$I^2 \gtrless 2\,I.$$

Appliquons à cet équilibre la loi d'action de masse. Soit p_1 la pression de la vapeur d'iode monoatomique, p_2 celle de l'autre vapeur diatomique et P la pression totale du système. Les densités théoriques pour les deux espèces d'iode sont respectivement 4,4 et 8,8. Nous avons :

$$\frac{p_1^2}{p_2} = K.$$

D'après la loi d'action de masse, le rapport du carré de la pression de I à la pression de I^2 doit rester constant à une même température.

D'autre part, on a les relations suivantes :

$$p_1 + p_2 = P,$$
$$d = 8{,}8\,\frac{p_2}{P} + \frac{8{,}8}{2}\,\frac{p_1}{P}.$$

En éliminant p_1 et p_2 entre les trois relations précédentes, on établit que le rapport

$$\frac{P\,(8{,}8 - d)^2}{2\,d - 8{,}8} = K$$

doit rester constant à une même température.

Appliquons ceci aux expériences de Crafts et Meier (1), qui ont déterminé les densités de la vapeur d'iode à différentes températures et sous différentes pressions. Leurs résultats sont traduits par quatre courbes donnant la densité en fonction de la température aux pressions suivantes : $0^{atm},4$; $0^{atm},3$; $0^{atm},2$ et $0^{atm},1$.

J'ai déduit de ces graphiques les valeurs suivantes et j'ai calculé les valeurs de K correspondantes.

(1) *Comptes rendus*, t. XCII, p. 41 ; 1881.

Température 1.100°

Pression atm	Densité	K
0,4	6,43	0,56
0,3	6,24	0,54
0,2	6,00	0,55
0,1	5,40	0,57

Température 1.050°

0,4	6,80	0,33
0,3	6,55	0,35
0,2	6,28 (1)	0,33
0,1	5,67	0,38

Température 1.200°

0,4	5,86	1,1
0,3	5,60	1,2
0,2	5,36	1,2
0,1	4,92	1,4

Température 800°

0,4	8,52	0.01
0,3	8,24	0.01
0,2	7,88	0,02
0,1	7,43	0,02

Ces quatre tableaux fournissent pour une même température, des valeurs de K qui peuvent être considérées comme constantes. Si l'on tient compte des difficultés expérimentales que comporte la détermination de semblables densités à température élevée et sous d'aussi faibles pressions, on sera frappé par la concordance des valeurs de K. Une semblable concordance pour quatre températures distinctes ne peut s'expliquer par une coïncidence fortuite. La variation de densité est donc bien la conséquence d'une décomposition chimique éprouvée par la vapeur d'iode et représentée exactement par l'équation précédente.

(1) Valeur obtenue en corrigeant l'irrégularité présentée en ce point par la courbe d'après le principe de continuité.

Les valeurs de K aux différentes températures sont les suivantes :

800°	0,02
1.050°	0,35
1.100°	0,55
1.200°	1,2

Il est possible de calculer la chaleur mise en jeu dans la dissociation précédente en appliquant la formule de Nerst :

$$q = -\frac{4,571 \times T_1 T_2}{T_2 - T_1} (\log K_2 - \log K_1),$$

où T_1 et T_2 sont les températures absolues correspondant aux valeurs K_1 et K_2.

$$K = \frac{C_2}{C_1^2}.$$

où C_1, C_2 sont les concentrations en molécules-grammes (par litre) à l'équilibre.

A 1.200°, c'est-à-dire 1.473° absolus, nous avons :

Pression.....	$0^{atm},2$
Densité.....	5,36
Température.....	1.473°

On en déduit pour I^2 et I les pressions respectives de $0^{atm},0436$ et $0^{atm},1564$, et pour C_1 et C_2 ;

$$C_2 = \frac{273 \times 0,0436}{22,32 \times 1473},$$

$$C_1 = \frac{273 \times 0,1564}{22,32 \times 1473};$$

par suite

$$K_2 = \frac{C_2}{C_1^2} = 214,7.$$

A 1.100° avec les données suivantes :

Température.....	1.373°
Pression.....	$0^{atm},2$
Densité.....	6,0

On a de même pour $K_1 = 505{,}1$; par suite

$$q = 34.350 \text{ calories}$$

ou en grandes calories

$$Q = 34^{cal},35.$$

La chaleur de dissociation de la molécule I^2 est ainsi de $-34^{cal},35$ pour une température voisine de 1.150°.

On trouve de même

$-31^{cal},5$ vers 1.075°
-33 1.100°

En résumé, dans la dissociation de la molécule d'iode diatomique en deux molécules monoatomiques, il y a une absorption de chaleur voisine de 33 calories.

Cette dissociation n'est pas particulière à la molécule d'iode, elle doit se produire de même pour tous les éléments dont la molécule est polyatomique ; mais elle ne peut être manifestée qu'à des températures d'autant plus élevées que la chaleur de combinaison des atomes est plus grande.

Pour la molécule tétratomique du phosphore, on a pu mettre en évidence le commencement de sa dissociation sans doute en molécule diatomique ; si l'on pouvait poursuivre la mesure de la densité à des températures de plus en plus élevées, on atteindrait sans doute une zone de température pendant laquelle la molécule diatomique serait stable ; puis, en dépassant cette zone, on finirait par atteindre la dissociation de la molécule diatomique en monoatomique.

En tous cas, on doit regarder la dissociation de la molécule d'iode comme un fait positif acquis à la science, et les ouvrages de chimie, aussi bien les ouvrages classiques que les traités spéciaux, ne doivent plus dire aujourd'hui « que la molécule d'iode semble subir une dissociation », mais qu'elle la subit effectivement.

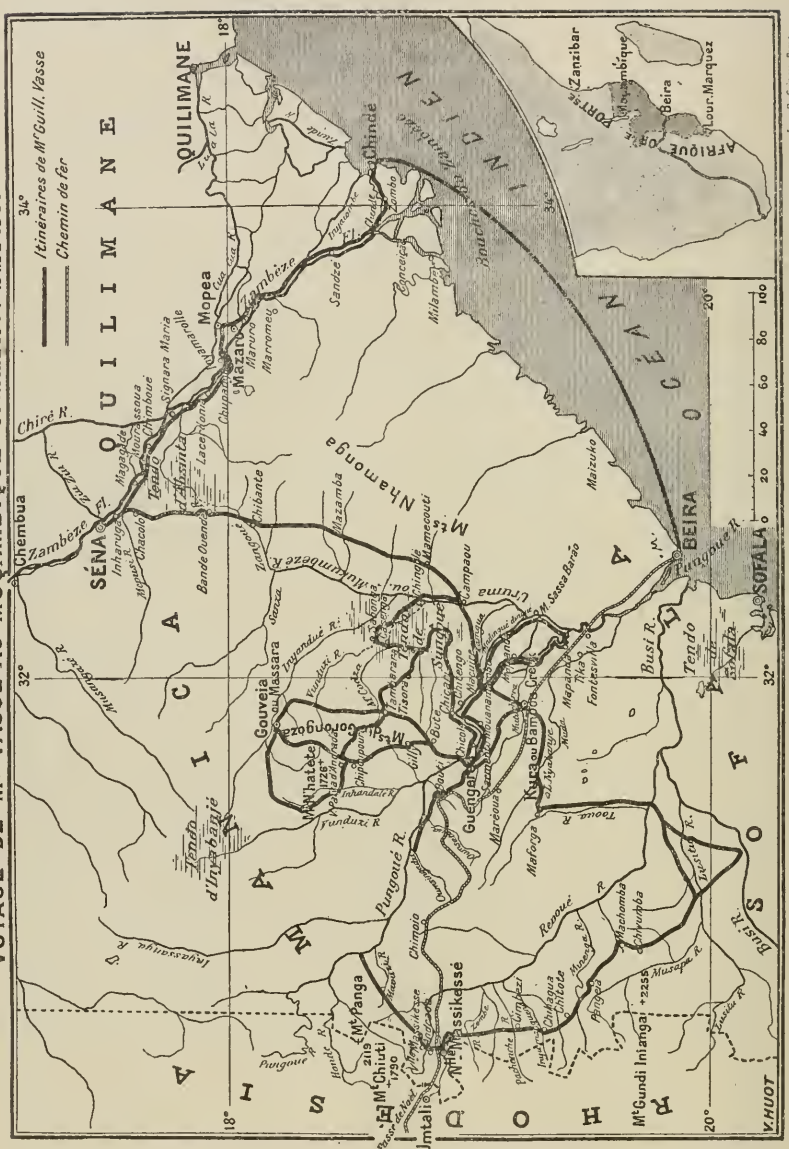
SUR LES OISEAUX SÉDENTAIRES DANS LES BASSINS DU PUNGOUÉ ET DU BAS ZAMBÈZE;

Par A. MENEGAUX.

Les oiseaux que j'ai étudiés proviennent des récoltes faites par M. Vasse dans les vastes régions du Pungoué et du bas Zambèze, encore peu explorées avant lui et dans lesquelles, pendant un séjour de trois années entières (du 30 avril 1904 au 15 mai 1907), il put relever 6.000 kilomètres d'itinéraires nouveaux indiqués sur la carte ci-jointe publiée par la Société de Géographie de Paris. Le bas Zambèze avait déjà été exploré avant lui au point de vue ornithologique par Kirk, Jameson, Alexander, mais, avant M. Vasse, seul Cavendish avait fait des récoltes près de Beira, à l'embouchure du Busi et du Pungoué.

M. Vasse commença ses chasses par Massikessé. Toute la région qui s'étend de cette localité au fleuve Busi est montagneuse et couverte d'une belle végétation. L'altitude y varie entre 900 et 2.000 mètres. Au contraire, le pays compris entre le Mukumbèze, le Tendo (marais) du Pungoué et le fleuve Pungoué est moins élevé, car l'altitude y atteint de 600 à 1.800 mètres. La région, qui est bien irriguée, produit une végétation luxuriante avec de grandes forêts où abondent les lianes à caoutchouc. Plus au nord-est et entre ces deux régions, par conséquent entre Sena, sur le Zambèze, Gouveia, Guengère et le Busi, se trouve une immense plaine, dont l'altitude oscille entre 40 et 100 mètres et qui est inondée dans la saison des pluies. Elle est couverte de bois de Mimosas, de Graminées et de nombreux roseaux. Près du Pungoué on trouve une quantité de sources salées où vivent et nidifient une multitude d'oiseaux aquatiques.

M. Vasse s'est attaché à ne collecter que les petites espèces résidant d'une façon permanente dans le pays; il a rapporté au Muséum 103 spécimens appartenant à 97 espèces et à 34 familles. Mais le nombre des pièces qu'il a tuées est beaucoup plus grand, il s'elève à 1.559, comme il l'indique dans le livre qu'il a publié sur ses


VOYAGE DE Mr VASSE AU MOÇAMBIQUE 30 AVRIL 1904-15 MAI 1907
Itinéraires de Mr Guill. Vasse
Chemin de fer
QUILIMANE
SENA
BEIRA
Zambèze
Chembua
Chiré R.
Mopea
Mazaro
Chindé
Sanzée
Milambe
Nhamonga
Mts Nhamonga
Maizuko
Gouveia
Massara
Mt Chiroongoze
Mt Chiuti
Mt Panga
Mt Gundi Inlanga
Mt Massikessé
Mt Umtali
Guengue
Kyra ou Bamboo Creek
Busi R.
Tendo
Sofala
Zanzibar
Mozambique
Beira
Lour. Marquez
PORT.SE
AFRIQUE OR.
OCEAN INDIEN
MASHONA
V. HUOT
Imp. Duffresny-Paris

chasses au Mozambique. Ce sont des Pigeons verts, des Martins-pêcheurs, des Tourterelles, des Perdrix, des Cailles, des Pintades (ordinaires et vulturines), des Outardes, des Bécassines, des Chevaliers, divers Râles, des Grues couronnées, des Hérons, des Aigrettes, des Crosses, des Marabouts, des Cigognes, des Ibis, des Spatules, des Flamants, des Canards (siffleurs et à caroncule), des Fuligules, des Sarcelles, des Oies noires et de Zanzibar, etc.

Les Aigrettes nidifient dans ce pays en colonies nombreuses, comprenant 1.500 à 2.000 individus; elles établissent leurs héronnières sur les Mimosas (*Acacia giraffæ*), tandis que celles des Marabouts sont sur les Baobabs ; leurs colonies sont beaucoup moins nombreuses.

M. Vasse a fait en outre sur les diverses espèces récoltées de nombreuses observations biologiques dont j'ai tenu compte dans ce travail. Il m'a paru utile, en plus de l'aire de dispersion, d'indiquer si les diverses espèces ont déjà été signalées dans les pays circonvoisins, c'est-à-dire dans le bassin du Zambèze, par Alexander, et dans le Mashonaland, par Sowerby et Marshall. Quelques-unes des espèces étudiées avaient déjà été collectées par Cavendish près de l'embouchure du Pungoué, à Beira, en 1899, mais le plus grand nombre est nouveau pour cette région.

I. — Falconidés.

1. Buteo augur (Rüpp.).

Falco (*Buteo*) *augur* Rüppell, *Neue Wirb. Vög.*, p. 38, 44, Pl. 16 (1844) ; Reichenow, *Vögel Afr.*, I, p. 592 (1901); Sclater, *Birds South Afr.*, III, p. 332, 1903.

Un *mâle* de la vallée du *Muzu*, à 1.120 mètres d'altitude, 23 septtembre 1904. Œil noir, large bordure jaune, bec gris noir, cire jaune, pattes grises (n° 38). Longueur totale, 600 millimètres. N'a pas encore le plumage de l'adulte. Les parties inférieures sont toutes blanches, mais le jugulum porte un assez grand nombre de plumes dont l'extrémité est marquée au milieu d'une tache noire allongée, bordée latéralement par du brun très clair. La tête est gris jaunâtre, la nuque noire et le dos porte un grand nombre de plumes noires à leur extrémité. Un spécimen des Galeries est étiqueté jeune femelle.

Cet oiseau vit aux grandes altitudes ; il est très redouté des Cafres dont il tue les jeunes chevreaux

Il habite le nord-est et l'est de l'Afrique. Sclater (in *Birds South Afr.*, III, p 333) signale, d'après Marshall, un spécimen en plumage noir qui fut tué à Salisbury (Mashonaland).

2. Buteo desertorum (Daud.).

Falco des. Daudin, *Traité.* II, p. 162 (1800).
But. des. Reichenow, *Vög. Afr.*, I, p. 594 (1904); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 333 (1903).
Le *Rougri* Levaillant, *Ois. d'Afr.*, p. 77, pl. 17 (1799)

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, à 1.120 mètres d'altitude; 17 octobre 1904 (n° 44).

Bec noir, avec cire jaune, pattes jaunes, œil noir à bordure jaune, longueur totale, $0^{m},48$. Les taches brunes que porte le plumage indiquent que c'est un jeune. Les plumes de la poitrine sont roux châtain, celles de l'abdomen sont blanches avec des bandes chatain clair. On trouve aux Galeries du Muséum un individu identique, provenant de Turquie, qui est étiqueté femelle.

Cet oiseau de proie est commun partout. On le rencontre beaucoup plus fréquemment d'octobre à avril, c'est-à-dire pendant les mois du passage des sauterelles. Il accompagne les bandes de sauterelles migratrices et en fait une grande consommation.

Il est doué d'une vue très perçante, et c'est lui qui arrive généralement avant tout autre oiseau de proie sur les cadavres qu'il découvre dans la brume. On peut le voir souvent assister à la curée des vautours, mais comme il est très agile, il dérobe fréquemment le morceau que deux charognards se disputent. Il fait aussi de grands ravages dans les basses-cours.

Habite le nord-est, l'est et le sud de l'Afrique. Localité nouvelle.

3. Aquila wahlbergi Sund.

Aquila wahlb. Sundevall, *Œfvers. K. Vet. Akad. Handl.*, Stockholm, p. 109 (1851); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 396 (1903).
Hieraetus wahlb. Reichenow, *Vög. Afr.*, I, p. 581 (1901).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, dans le Manica, altitude 1.120 mètres ; 8 septembre 1904 (n° 34).

Œil noir à pourtour jaune, bec gris noir avec cire jaune, pattes grises. Longueur totale, 580 millimètres.

Paraît exister dans toute la région éthiopienne. Le type décrit par Sundevall provenait de la « Caffraria Superiori, prope 25° latitude », ce qui correspond au Transvaal occidental actuel. Il a été signalé dans le Mashonaland, par Shelley et Ayres, au Fort Chiquaqua, par Sowerby, près de la baie de Delagoa, par Monteiro.

Marshall le dit commun près de Salisbury (1900, p. 257), dans le Mashonaland.

4. Spizaëtus coronatus (L.).

Falco cor. Linné, *Syst. nat.*, I, p. 124 (1766).
Spiz. cor. Reichenow, *Vög. Afr.*, I, p. 576 (1901) ; Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 304 (1903).
Le *Blanchard* Levaillant, *Ois. d'Afr.*, I, p. 12, Pl. 3 (1799).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué ; 8 juillet 1906.

Bec noir, pattes jaune pâle ; œil noir avec bordure jaune clair. Longueur totale, 790 millimètres (n° 102).

Cet oiseau doit être rare, car M. Vasse ne l'a vu qu'une fois. Les Cafres assurent qu'il se nourrit de serpents, d'où le nom qu'ils lui donnent, *Timba nioca*, et qui signifie « celui qui prend les serpents ».

Il paraît habiter les grandes forêts de l'Afrique, au sud du Sahara et de l'Abyssinie. Signalé au Transvaal et au Bechouanaland, par Holub, au Natal, par Ayres, dans la Cafrerie, par Krebs. C'est donc une localité nouvelle.

5. Asturinula monogramma (Tem.).

Falco monogrammicus Temminck, *Pl. Col.*, I, Pl. 314 (1824).
Kaupifalco monogr. Reichenow, *Vögel Afr.*, I, p. 547.
Asturinula monogr. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 327 (1903).

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué ; 40 mètres d'altitude ; 28 avril 1906.

Bec rouge et noir, pattes rouges ; œil noir à bordure marron foncé. Nom cafre, *Tchouanga*. Longueur totale, 0^{m},390.

Redouté des Cafres auxquels il tue quantité de poussins. Le soir, il chasse les gros insectes. Il semble de passage, car il se rencontre par bandes dès les premiers jours de décembre et disparaît en mai.

Il vit du Sénégal et de l'Abyssinie jusqu'au Transvaal et au Natal. Dans le sud-ouest, il paraît être remplacé par une forme peu différente, *Ast. mon. meridionalis* (Hartl.).

Signalé à Salisbury, par Marshall (1900, p. 241), et au Fort Chiquaqua, par Sowerby ; à Tete sur le Zambèze (Afrique portugaise), par Alexander (1900, p. 437).

6. Circaëtus cinereus Vieill.

Circ. cin. Vieillot, *N. Dict. H. nat.*, t. XXIII, p. 445 (1818, Sénégal) ; Reichenow, *Vögel Afr.*, I, p. 571 (1901), et Sharpe, *Handlist*, I, p. 265 (1899).
Cir. pectoralis Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 824 (1903) (partim).

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué ; altitude 40 mètres ; 14 juin 1906. Nom cafre, *Zoumbirra*. Bec noir, pattes grises, iris

jaune. Longueur totale, 700 millimètres ; aile, 533 ; queue, 280 ; tarse, 102; bec, 40.

Cet oiseau se rencontre toute l'année dans la région (Vasse). Cet animal est identique au type de Vieillot conservé aux Galeries de Zoologie. Ce dernier est aussi un jeune, mais un peu plus âgé que celui que j'étudie. Ainsi, les plumes du dos ont une bordure fauve plus claire que sur le type de l'espèce. La base des plumes est blanche sur tout le corps; mais celles de la tête ont une portion brune assez courte en sorte qu'on aperçoit le blanc par places. Sur la poitrine antérieure on voit une tache blanche, ainsi que sur les flancs où se trouvent aussi des touffes de duvet blanc. Autour des yeux existe un duvet blanc et un trait supra-sourcilier noir.

Comme sur le type, la base des rémiges est blanche et les sous-alaires sont tachetées de brun, ainsi que le bord alaire ; les grandes couvertures supérieures et inférieures de la queue sont terminées par du blanc.

Les rectrices sont un peu différentes de celles du type. Les deux médianes ont deux bandes blanches avec la pointe blanche, tandis que sur le type il y en a trois plus une moins nettes et une pointe blanche. Les deuxièmes en ont quatre, comme sur le type, et les deux externes n'en ont sur la vexille interne que trois blanches, qui se continuent par une jaunâtre peu marquée sur l'externe.

D'après Reichenow (p. 572), cette forme ne peut être regardée comme le jeune âge de *C. pectoralis* A. Sm., puisque l'on ne connaît que des spécimens de coloration concordante et de plus aucune forme de passage entre ces deux espèces.

Habite l'ouest, le nord-est et l'est de l'Afrique. N'a été signalé qu'au Fort Chiquaqua, par Sowerby.

7. Helotarsus ecaudatus (Daud.).

Falco ec. Daudin, *Traité*, II, pl. 54 (1800); Reichenow, *Vög. Afr.*, I, p. 598 (1901); Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 314 (1903).

Le *Bateleur* Levaillant, *Ois. d'Afr.*, I, p. 31, Pl. 7 et 8 (1799).

Un spécimen de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude; 29 juin 1906. Nom cafre, *Chapongo*. Bec orangé à la base, noir à la pointe, cire rouge orangé; pattes jaune rouge, caroncule rouge autour de l'œil ; œil noir à bordure jaune. Longueur totale, 0^{m},615 (n° 98).

Se rencontre toute l'année; il capture beaucoup de rats palmistes et de lièvres, surtout au moment des feux de brousse.

Il habite toute l'Afrique, au sud du Sahara et de l'Abyssinie. Il a été signalé, autour des possessions portugaises, au Transvaal, Mata-

beleland, par Buckley, au Mashonaland (Chiquaqua), par Sowerby, près de Salisbury, Mashonaland, par Marshall (1900, p. 258), sur le haut Zambèze, par Bradshaw, à Chicowa, sur le Zambèze, par Alexander (1900, p. 436).

8. Falco minor Bp.

F. minor Bonaparte, *Rev. Mag. Zool.*, p. 484 (1850); Reichenow, *Vögel Afr.*, I. p. 622 (1901); Sclater, *B. South Afr.*, III, p. 268 (1903).
Faucon huppé Levaillant, *Ois. d'Afr.*, I. p. 121, Pl. 28 (1799).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 2 septembre 1904. Bec gris bleu, caroncule jaune, œil gris et noir, pattes jaunes. Longueur totale, 0m,385; aile, 0m,275; queue, 0m,131; bec, 0m,02 (n° 31).

Ce petit Faucon pèlerin vit dans les montagnes; il prend beaucoup de perdrix de rocher. Son cri ressemble en plus fort à celui du Tiercelet.

Habitat: sud et sud-est de l'Afrique, Madagascar.

Signalé au Natal, près de Durban, par Gurney, dans la Rhodésie, près de Pandamatenka, par Holub, et dans la Cafrerie, par Krebs.

II. — Psittacidés.

9. Poecephalus robustus (Gm.).

Psittacus rob. Gmelin, *Syst Nat*, p. 344 (1788).

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 30 décembre 1905 (n° 89). Bec jaune pâle, pattes grises, œil noir avec bordure marron. Taille, 0m,312. Nom cafre, *Ghora*.

Cette femelle porte sur le front une large bande d'un beau rose assez vif. Elle ne diffère pas du mâle.

M. Vasse n'a observé ce Perroquet que dans la vallée du Pungoué, où il ne vit jamais en sociétés de plus de trois individus. Il nidifie dans le creux des arbres vermoulus comme l'avait déjà affirmé Levaillant, et cause de grands dommages aux récoltes de blé cafre (*Sorghum vulgare*). Il semble être de passage dans cette région, arriver en novembre et partir en juillet.

Signalé comme habitant les parties sud orientales de l'Afrique, du Knysna jusqu'au Natal, et dans la Rhodésie, au Mashonaland. Son aire d'habitat s'étend donc beaucoup plus au nord jusqu'au Zambèze.

10. Poecephalus fuscicapillus (Verr. et des Murs).

Pionus fusc. Verreaux et des Murs, *Rev. Mag. Zool.*, p. 58 (1869, Zanzibar).

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude, 11 juillet 1905 (n° 67). Bec noir, pattes noires, œil brun avec bordure jaune ; longueur totale, 0m,23.

Cet oiseau se fait voir toute l'année en petites bandes de quatre à six individus. Il nidifie dans les troncs d'arbre et cause de grands dommages aux champs de sorgho. Son vol est rapide et son cri vif et perçant.

Habite l'Afrique orientale, depuis Mombas jusqu'au Souasiland. A été signalé à Inhambane par Peters et sur le fleuve Sabi. Pas encore signalé dans le bassin du Pungoué.

III. — Coraciidés.

11. Coracias caudatus L.

Cor. caud. Linné, *Syst. Nat.*, I., p. 160 (1766) ; Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 223 (1902-1903) ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 48 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude ; 29 août 1905.

Bec noir, pattes grises, œil noir, bordure jaune pâle. Longueur totale, 0m,383 (n° 72).

Grand amateur d'insectes. Vient aux feux de brousse et fait concurrence aux guêpiers dans la chasse des sauterelles. Beaucoup plus commun en régions basses qu'en montagnes.

Il habite le sud et l'est de l'Afrique ; à l'ouest il remonte jusqu'à l'Angola et à l'est jusqu'au Choa. Déjà signalé dans la vallée du bas Zambèze à Tete, par Kirk, dans la vallée de l'Umfuli, par Ayres et Marshall, dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

12. Eurystomus afer (Lath.).

Coracias afra Latham, *Ind. Ornith.*, t. I, p. 172 (1790).
Eur. afer Reichenow, *Vögel Afr.*, t. II, p. 229 (1902-1903) ; Stark, *Birds S. Afr.*, t. III, p. 54 (1903).
Le *petit Rolle violet* Levaillant, *Ois. Parad.* Rolliers, Pl. 35 (1806).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude ; 6 novembre 1905 ; nom cafre, *Balame Ka Mourongo*.

Bec jaune, pattes grises, œil noir à bordure marron (n° 81).

C'est un oiseau de passage qui arrive vers le commencement de

novembre, c'est-à-dire à l'époque des orages, ce qui lui vaut le nom que les Cafres lui donnent et qui signifie « Oiseau du Tonnerre ». Il disparaît en mars. Les soirs d'orage, lorsque des migrations de termites se produisent, il les poursuit avec activité. Son cri est guttural.

Habite toute l'Afrique tropicale. Déjà signalé dans la vallée du Zambèze, par Kirk (à Tete), Meller et Alexander, près du fleuve Umfuli, par Shelley, par Ayres et par Marshall, au Fort Chiquaqua (Mashonaland), par Sowerby, à Inhambane, par Sclater. Donc localité nouvelle.

IV. — Alcédinidés

13. Ceryle rudis (L.).

Alcedo rudis Linné, *Syst. Nat.*, p. 116 (1758).
Ceryle rudis Reichenow, *Vög. Afr.*, II, p. 295 (1902-1903) ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 73 (1903).

Une *femelle* du village de *Cialima*, sur le Mozambèze, affluent de droite du Pungoué ; altitude 45 mètres ; 5 décembre 1905.

Bec noir, pattes noires, œil bleu à bordure noire ; longueur totale, $0^{m},258$ (n° 79).

Cri vif et strident. Plane au-dessus des cours d'eau et se laisse tomber pour saisir à fleur d'eau le petit poisson.

Se rencontre partout.

Habite les îles grecques de la Méditerranée, l'Asie jusqu'au golfe Persique, l'Egypte et toute l'Afrique au sud du Sahara. Signalé dans le Mashonaland, par Shelley et Marshall, dans la vallée du Zambèze, à Tete, par Alexander.

14. Corythornis cyanostigma (Rüpp.).

Alcedo cyan. Rüppell, *Neue Wirb., Vögel*, p. 70, Pl. 24, *fig.* 2 (1835).
Corythornis cyan. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 289 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 81 (1903).

Une *femelle* du confluent de l'*Uréma* et du Pungoué ; 14 février 1907.

Bec et pattes couleur corail ; œil noir avec bordure marron très clair ; longueur totale, $0^{m},109$ (n° 109).

M. Vasse n'a rencontré cette espèce qu'aux basses altitudes : cours inférieur du Pungoué, du Busi, du Zambèze et de leurs affluents.

Habite toute l'Afrique au sud du Sahara, depuis la Sénégambie et l'Abyssinie, d'où provenait le type de Rüppell, jusqu'au Cap. Signalé

dans la vallée du Zambèze, par Kirk et Alexander, et dans le Mashonaland, par Shelley et Marshall.

15. Halcyon albiventris orientalis (Peters).

Alcedo albiventris Scopoli, *Del. Flor. et Faun. Insubr.*, II, p.90 (1786).
Halcyon orientalis Peters, *J. f. Ornith.*, p. 138 (1868) ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 89 (1903).
Halc. alb. or. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 275 (1902-1903).

Un *mâle* de la vallée du *Revoué*. Longueur totale, 0m,196. Bec tout entier rouge. De taille plus grande que *H. chelicuti* (Stanl.).

Habite l'est de l'Afrique, du Kilimandjaro jusqu'au Mozambique et le sud-ouest, du Mossamedes jusqu'à l'Oubanghi.

Le type de l'espèce a été récolté à Inhambane par Peters. Signalé à Mapicuti, au nord de Beira, par Cavendish, et dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

16. Halcyon chelicuti (Stanley).

Alcedo ch. Stanley, *Salt's Exp. Abyss.*, App., p. 56 (1814), III, p. 89 (1903).
Halcyon ch. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p.271 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, p. 89 (1903).

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué ; altitude 750 mètres ; 17 décembre 1904.

Œil noir, mandibule supérieure noire, mandibule inférieure rouge ; pattes noires ; longueur totale, 0m,180 (n° 46).

Les ailes ont moins de 80 millimètres.

Commun dans tout le territoire.

Il habite l'Afrique jusqu'aux fleuves Orange et Waal. Il est plus rare dans la région forestière occidentale que dans les déserts du sud-est. Signalé dans le district de Salisbury, par Marshall, à Chiquaqua, par Sowerby, et dans la vallée du Zambèze, par Kirk.

V. — Bucérotidés.

17. Lophoceros melanoleucus (A. Lcht.).

Buceros melanoleucos Lichtenstein, *Cat. Rer. Nat.*, p. 8 (1793).
Loph. melanoleucos Reichenow, *Vög. Afr.*, t. II, p. 249 (1902-1903).
Loph. melanoleucus Stark, *Birds South Afr.*, t. III, p. 110.
Le *Calao couronné* Levaillant, *Ois. d'Afr.*, p. 117, Pl. 234, 235 (1806).

Un *mâle* de la vallée de *Muza*, 1.120 mètres d'altitude ; 9 septembre 1904 ; nom cafre, *Pou-pou-pou*, qui lui vient de son cri (n° 35).

Bec rouge, pattes noires, œil noir avec large bordure jaune clair. Longueur totale, 0m,480; bec, 0m,09 ; aile, 0m,249; queue, 0m,250.

Les deux rectrices médianes n'ont pas de blanc à leur extrémité.

Commun et sédentaire, il vit généralement en petites bandes. Il est omnivore, car M. Vasse l'a vu manger indifféremment du sorgho, des fruits, des baies, des insectes, et même, au moment des incendies, s'emparer des musaraignes.

Se remarque par son vol saccadé durant lequel il prend la forme d'une croix. Sa langue est plate, petite, sèche et cornée. La peau est facile à détacher du corps, car elle n'y tient que par quelques filaments extensibles et élastiques (Vasse).

Habite le sud de l'Afrique, à l'ouest jusqu'au Loango, à l'est jusqu'à l'Ouganda. Déjà signalé près du Zambèze, par Alexander (1899, p. 100), dans la vallée du Chiré, par Kirk (1864, p. 327), à Quilimane, par Stuhlmann, au Fort Lister, par Whyte.

18. Bycanistes buccinator (Tem.).

Buceros buccinator Temminck, *Pl. col.*, 48e liv., Pl. 284 (1824).
Byc. buccinator Reichenow, *Vögel Afr.*, t. II, p. 243 (1902-1903).
Byc. buccinator Stark, *Birds S. Afr.*, t. III, p. 106 (1903).

Une *femelle* de la vallée du *Pungoué ;* 30 novembre 1905.

Bec noir, pattes noires, œil noir avec caroncules rouges autour de l'œil ; lores noires. Longueur totale, 0m,515 (n° 73).

Une *femelle* de Guengère, vallée du Pungoué, 15 novembre 1906. Bec noir et jaune, pattes grises, œil noir; lores brunes (n° 108). Nom cafre, *Kakamira*.

Cet oiseau est sédentaire et vit en bande dans les bois épais qu'il affectionne. Il se nourrit de fruits et de graines.

Son cri ressemble aux plaintes d'un enfant qui pleure. Le mâle et la femelle bâtissent leur nid ensemble ; la femelle y pond et, dès qu'elle se met à couver, le mâle mure l'entrée du nid, ne laissant qu'un orifice suffisant pour qu'il puisse apporter à manger à la couveuse (Vasse).

Habite le sud de l'Afrique, jusqu'à l'Angola à l'ouest, et à Witu à l'est. Déjà signalé à Chupanga, par Kirk et Alexander, au nord du moyen Zambèze, par Foa, près du Zambèze, par Meller, et du Mwanza, par Sharpe.

VI. — Upupidés.

19. Upupa africana Bechst.

Up. afr. Bechstein, *Kurze Uebers.*, IV, p. 172 (1811); Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 337; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 10 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 403 mètres ; 14 novembre 1906 (n° 107).

Bec gris, pattes grises, œil noir avec bordure marron foncé ; nom cafre, *Pou-Pou*.

Cette huppe affectionne les endroits découverts et sablonneux ; elle est grande mangeuse de fourmis.

De passage dans la région, car elle arrive fin mai et repart en octobre.

Habite le sud de l'Afrique jusqu'au Congo d'une part et l'Afrique orientale anglaise d'autre part.

Signalé dans le Mashonaland, par Jameson, à Salisbury, par Marshall, au Fort Chiquaqua, par Sowerby, dans la vallée du Zambèze, par Kirk et Alexander.

VII. — Irrisoridés.

20. Rhinopomastus cyanomelas (V.).

Falcinellus cyan. Vieillot, *Nouv. Dict.*, XXVIII, p. 165 (1819).
Rhin. cyan. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 346 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 17 (1903).
Le *Promerops namaquois* Levaillant, *H. Nat. Prom.*, Pl. 5 et 6 (1807).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, à 1.120 mètres d'altitude ; 28 septembre 1904.

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, $0^{m},252$ (n° 43).

M. Vasse n'en a aperçu qu'un couple. Cet oiseau court avec agilité le long des branches, pour chercher des insectes.

La forme typique habite le sud de l'Afrique jusqu'au Congo et au Zambèze.

Signalé au Fort Chiquaqua, par Sowerby, à Salisbury, par Marshall, et dans la vallée du Zambèze, par Alexander. Il est toujours rare.

VIII. — Méropidés.

21. Dicrocercus hirundineus (A. Lcht.).

Merops hir. Lichtenstein, *Cat. rer. nat. variss.*, p. 21 (1793).
Dicroc. hir. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 315 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 65 (1903).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres ; 9 juillet 1904 (n° 11).

Mêmes habitudes que *Merops apiaster* L.

Habite le sud de l'Afrique. Au nord du Zambèze, on l'a trouvé dans l'Angola, le Nyassaland et l'est africain allemand. A l'ouest et dans le nord-est, il est remplacé par des formes très voisines.

Signalé par Marshall, à Salisbury, au nord du moyen Zambèze, par Foa et au Fort, Chiquaqua, par Sowerby.

22. Melittophagus meridionalis Sharpe.

Mel. mer. Sharpe, *Cat. Birds B. Mus.*, XVII, p. 45, Pl. I, *fig.* 4 (1892) ; Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 307 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 67 (1903).

Une *femelle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres ; 8 août 1904.

Bec noir, pattes noires ; œil noir avec bordure rouge. Longueur totale, 0m,144 (n° 14).

C'est un insectivore dont le vol ressemble à celui des autres Guêpiers. Il vit en troupes composées de cinq à six individus, au voisinage des bordures des bois ou dans les plaines.

Habite l'Afrique orientale depuis l'Ouganda jusqu'au Natal, le sud-ouest de l'Afrique depuis Loango jusqu'au Cunene et au lac Ngami.

Récolté près Beira, à Barratas et Mapicuti, par Cavendish, à Tete, par Kirk, près du Zambèze moyen, par Alexander, dans le Mashonaland, par Marshall, et au Fort Chiquaqua, par Sowerby.

23. Melittophagus bullockoides (A. Smith).

Merops bull. A. Smith. *S. Afr. Quat. Journ.*, II, p. 320 (1834).
Mell. bull. Reichenow, *Vögel Afr.*, II. p. 311 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 70 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué ; 40 mètres d'altitude ; 16 juillet 1906 (n° 68).

Bec noir, pattes noires. Longueur totale, 0m, 210.

Ce guêpier vit en colonies dans les plaines basses du Pungoué. Il nidifie dans les falaises argileuses qui bordent le fleuve, le nid est

au fond d'un trou. Son cri est à peu près *Tri-tri-tri*. Il paraît sédentaire dans la région.

Habite le sud-ouest de l'Afrique, du Congo jusqu'au Cunene, et l'est, du lac Naiwascha jusqu'au fleuve Orange. Signalé dans le district de Beira, à Barratas, par Cavendish, vallée du Zambèze, par Kirk; à Umquasi, près Tete, sur le Zambèze, par Alexander.

24. Merops nubicoides Des Murs Puch.

Merops nub. Des Murs Pucheran, *Rev. Zool.*, p. 243 (1846) ; Reichenow, *Vögel Afr.*, II., p. 328 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 62 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 4 septembre 1905.

Bec noir, pattes noires, œil noir à bordure rouge. Longueur totale, 0m,360 (n° 77).

Ce guêpier arrive dans les plaines basses, d'altitude variant entre 100 et 20 mètres, dès le début de juillet et fait son apparition par vent du nord. Il reste dans le pays de cette époque jusqu'aux premières pluies d'octobre. Il ne manque pas un feu de brousse. Il fait alors une grande destruction des insectes qui s'envolent devant l'incendie. Quitte ces régions en octobre et passe par vent du nord dans la région montagneuse du Manica, de 1.100 à 1.700 mètres. Il n'y séjourne généralement pas et poursuit sa migration au sud.

Habite le sud de l'Afrique, du Congo au Damara et du Nyassaland au Natal. Signalé sur le Zambèze et le Chiré, par Kirk, à Sena, Zumbo, sur le Zambèze, par Alexander, à Mapicuti, par Cavendish, et Inhambane, par Francis.

25. Merops apiaster L.

Mer. ap. Linné, *Syst. Nat.*, p. 117 (1758); Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 321 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 57 (1903). Le *Guêpier* de d'Aubenton.

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres, 15 décembre 1904 (n° 45).

Le guêpier vit en petites bandes; il se livre constamment à la chasse des insectes; son vol est tantôt rapide, tantôt planant; son cri est aigu et désagréable.

Il habite le sud de l'Europe, le nord de l'Afrique, l'Asie Mineure, l'Inde et l'Afrique en hiver. Signalé à Salisbury, par Marshall, près de Zumbo, vallée du Zambèze, par Alexander.

IX. — Caprimulgidés

26. Caprimulgus trimaculatus.

Scotornis trim. Swainson, *B. West. Afr.*, p. 70 (1837).
Cap. trim. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 359 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 38 (1903).

Un *mâle* (?) de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 23 août 1904 (n° 22).

Bec noir, pattes grises, œil bleu très foncé. Longueur totale, 0m,252; aile, 0m,170; queue, 0m,140. Seules les trois rémiges primaires sont marquées d'une tache blanche sur leur vexille interne. Ce spécimen me paraît être une femelle, car les taches blanches manquent sur les rectrices externes.

Habite le sud, l'est et le nord-est de l'Afrique ; il paraît rare partout. N'a pas encore été collecté dans cette région.

X. — Cypsélidés.

27. Cypselus caffer Lcht.

Cyps. caffer Lichtenstein, *Verz. Doubl.*, p. 58 (1823) ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.* III, p. 25 (1903).
Apus caffer Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 380 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, 29 juillet 1906 (n° 97).

Bec noir, pattes noires ; œil noir à bordure marron très foncé. Nom cafre, *N'yen tambamibvi.*

Longueur totale, 0m,156 ; aile, 0m,149 ; queue, 0m,065 ; rectrices moyennes, 0m,050. Les rectrices latérales sont donc très courtes et rappellent celles de *C. horus* (Hartl.).

Il est de passage dans la région, car il apparaît en décembre et disparaît en avril.

Habite le sud de l'Afrique. Il est rare dans le Mashonaland, où il a été signalé par Ayres et Jameson.

XI. — Coliidés.

28. Colius striatus minor Cab.

Colius minor Cabanis, *J. f. O.*, p. 94 (1876).
Col. st. minor Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 203 (1903).
Le *Coliou rayé* de Levaillant.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres ; 21 août 1904 (n° 26).

Bec : partie supérieure noire, partie inférieure blanche ; pattes rouges, œil noir.

Se nourrit d'insectes ; vit en bandes de six à dix individus.

Cette forme habite le sud-est de l'Afrique.

Signalée à Tete, par Alexander, et dans la vallée du Zambèze, par Meller.

XII. — Trogonidés.

29. Hapaloderma narina (Steph.).

Trogon narina Stephens, *Gen. Zool.*, IX, p. 14 (1815).
Apal. nar. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 212.
Hapal. nar. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 121 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, à 40 mètres d'altitude ; 3 décembre 1905 (n° 85).

Mandibule supérieure verdâtre, mandibule inférieure jaune, œil noir à bordure rouge brique ; longueur totale, 0m,325.

C'est un oiseau rare dont M. Vasse en trois ans n'a vu que trois spécimens : l'un d'eux fut observé dans la vallée du Muza à 1.120 mètres d'altitude. Il semble affectionner les ravins ombreux et les bois fourrés.

Habite le sud de l'Afrique ; à l'est on le trouve jusqu'au sud de l'Abyssinie, tandis qu'à l'ouest il remonte jusqu'à l'Angola (ou Loango). Signalé dans la vallée du Zambèze et du Chiré (Tchibisa) par Kirk.

XIII. — Musophagidés.

30. Turacus livingstonei G. R. Gray.

Tur. liv. Gray, *P. Z. S.*, p. 44 (1864) ; Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 51 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 216 (1903).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, à 1.120 mètres d'altitude ; 11 avril 1904 (n° 13).

Bec rouge, pattes noires, œil bleu de Prusse avec bordure marron clair : un liséré blanc autour des yeux. Longueur totale, 0m,420. Nom cafre, *Koulou-Koulou*, qui lui vient de son cri.

Oiseau sédentaire, ne se rencontre qu'aux grandes altitudes, jamais plus bas que 900 mètres. Il se nourrit de fruits et de baies et vit en petites bandes de six à huit individus qui affectionnent les ravins ombreux, les bois touffus. Il court avec agilité le long des branches.

Dès qu'elle entend quelque bruit, la bande reste immobile dans le feuillage où elle se dissimule adroitement. Sitôt qu'elle croit le danger passé, chacun de ses membres s'envole silencieusement l'un après l'autre.

Habite le sud-est de l'Afrique, depuis le Zoulouland jusqu'au lac Niassa. Signalé près du Zambèze par Kirk.

31. Gallirex porphyreolophus (Vig.).

Corythaix porph. Vigors, *P. Z. S.*, p. 93 (1831).
Gallirex porph. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 39; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.* III, p. 217 (1903).

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, à 750 mètres d'altitude; 2 novembre 1904 (n° 47).

Bec noir bleuté ; pattes noires, œil bleu de Prusse avec bordure marron clair; caroncule rouge vif autour de l'œil; longueur totale, 0^{m},420. Nom cafre, *Koulou-Koulou*.

Ces animaux vivent par petites bandes ne dépassant pas quatre individus, qui ordinairement ne quittent l'arbre sur lequel ils se trouvent que l'un après l'autre.

Ils vivent de fruits et de graines qu'ils vont chercher dans les ravins fourrés, dans les bois épais. Très adroit de ses pattes, le Gallirex parcourt les branches avec agilité. Entend-il quelque bruit, il se tient immobile dans la pénombre qui règne toujours là où il se complaît et, aussitôt que le silence est rétabli, il s'envole. Quand il est surpris, il prend son vol en poussant un cri bruyant qui lui vaut son nom cafre de *Koulou-Koulou*. Pendant la saison des amours, le mâle répète sans cesse le cri de *Kou-Kou*, etc.

Cette espèce habite le sud-est de l'Afrique, donc le sud du Zambèze. Au nord de ce fleuve, elle est remplacée par *G. chlorochlamys* Shell.

Elle a été signalée à Inhambane, par Peters, au Fort Chiquaqua, par Sowerby, dans la vallée du Zambèze, par Kirk et Meller, et sur les bords du Masoë et de l'Umvinji, par Marshall.

XIV. — Cuculidés.

32. Coccystes jacobinus (Bodd.).

Cuculus jacobinus Boddaert, *Tabl. Pl. Enl.*, 53 (1783).
Coccystes jac. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 78; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 195 (1903).
Le Coucou edolio femelle, de Levaillant.

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Punguoé, 40 mètres d'altitude; 7 novembre 1905 (n° 84).

Bec noir, pattes noires, œil noir avec bordure foncée. Longueur totale, 0m,350. Il est assez rare dans la région.

C'est un insectivore, comme Fischer l'a déjà montré.

Habite le sud de l'Asie, et l'Afrique au sud du Sahara. Signalé à Tete, sur le Zambèze, par Livingstone, et à Zumbo, sur le moyen Zambèze, par Alexander, ainsi que dans les environs de Salisbury (Mashonaland), par Marshall.

33. *Coccystes serratus* (Sparrm.).

Cuculus serratus Sparrmann, *Mus. Carls.*, I, Pl. 111 (1789).
Cocc. serr. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 75 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 199 (1903).
Le *Coucou edolio* mâle de Levaillant.

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, à 750 mètres d'altitude ; 6 novembre 1905 (n° 50).

Bec noir, pattes noires ; œil noir avec bordure marron foncé ; longueur totale, 0m,370 ; aile, 0m,160 ; queue, 0m,200 ; bec, 0m,022. Les dimensions de ce spécimen sont donc un peu plus grandes que celles indiquées dans les ouvrages.

Insectivore ; il chasse particulièrement les fourmis ailées. Son cri, composé de trois syllabes, peut se représenter par *To-ho-he*.

Habite l'est et le sud de l'Afrique. Signalé au Natal et au Transvaal, mais pas dans la région du Pungoué.

34. Centropus senegalensis (L.).

Cuculus seneg. Linné, *Syst. Nat.*, I, p. 169 (1766).
Centropus seneg. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 58 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 206 (1903).
Le *Coucal houhou* Levaillant.

Un jeune, presque adulte, de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres ; 30 août 1904 (n° 28). Les couvertures alaires sont encore faiblement striées, tandis que le croupion, les sus-caudales et les secondaires le sont visiblement, ainsi que les sous-caudales.

Commun et sédentaire, vivant dans les fourrés et les hautes herbes d'où il s'envole lourdement avec bruit. M. Vasse a trouvé des insectes dans son gésier et particulièrement des punaises.

Ce Coucal paraît habiter toute l'Afrique tropicale. Finsch, Hartlaub et Kirk l'ont récolté à Zanzibar, et Buckley dans le Bechuanaland (Bamangwato). Ce sont les localités les plus méridionales où on l'a rencontré.

XV. — Capitonidés.

Lybius torquatus (Dum.).

Bucco torq. Dumont, *Dict. Sc. nat.*, IV, p. 56 (1806).
Lybius torq. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 125 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p 157 (1903).
Le *Barbu à plastron noir* de Levaillant.

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, à 750 mètres d'altitude ; 29 décembre 1904 (n° 52). Bec noir, pattes noires, œil noir avec bordure rouge. Longueur totale, 0m,177. La teinte rouge du front est mêlée de noir.

Frugivore et granivore. Il vit en bandes. Son cri est perçant et répété plusieurs fois très rapidement.

Il habite le sud de l'Afrique jusqu'au Zambèze et au Benguella. Signalé à Tete, sur le Zambèze et Chupanga, par Kirk, à Salisbury, par Marshall, à Zumbo, par Alexander.

36. Trachyphonus cafer (V.).

Picus cafer Vieillot, *Nouv. Dict.*, XXIV, p. 102 (1818).
Trachyp. cafer Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 254; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 170 (1903).
Le *Promépic* de Levaillant.

Un *mâle* de *Guengère*, dans la vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude ; 17 juillet 1904 (n° 69).

Pattes noires, œil noir avec bordure rouge. Longueur totale, 0m,239.

Oiseau très rare. M. Vasse, pendant son voyage de trois ans ne l'a aperçu que deux fois à Guengère.

Habite le sud de l'Afrique; son aire d'habitat remonte à l'est jusqu'au Pangani, à l'ouest jusqu'à l'Angola. Signalé dans le Mashonaland, par Marshall, à Tete, sur le Zambèze, par Kirk, et dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

XVI. — Picidés.

37. Campothera malherbei (Cass.).

Chrysopicus malh. Cassin, *J. Ac. Philad.*, p. 459 (1863).
Dendromus malh. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 172 (1902-1903).

Une *femelle* (?) de la vallée du *Muza*, à 1.120 mètres d'altitude ; 27 septembre 1906 (n° 39).

Bec gris, pattes noires, œil noir à bordure rouge. Longueur totale, 0m,170.

Ce spécimen, étiqueté femelle, porte sur le vertex un grand nombre de plumes marquées d'une fine bande noire limitant la couleur rouge terminale.

D'après M. Vasse, son cri est strident.

Cette espèce habite l'Afrique orientale ; elle n'avait pas encore été signalée au sud du Zambèze.

38. Campothera bennetti (A. Sm.).

Chrysoptilus benn. A. Smith, *Rep. Exp. centr. Afr.*, p. 53 (1836).
Dendromus benn. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 177.
Campothera benn. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 133 (1903).

Un *mâle juv.* de la vallée du *Muza*, à 1.120 mètres d'altitude ; 19 août 1904 (n° 25).

Bec gris, pattes noires, œil noir à bordure rouge ; cri strident.

Ce spécimen, étiqueté mâle, a tous les caractères de la femelle, car le front et le vertex sont tachetés de blanc sur fond gris noir ; la gorge est d'un brun châtain ainsi que les lores, un trait au-dessous de l'œil et les joues. L'abdomen jusqu'aux anales est marqué de taches noires arrondies.

Il habite le sud et l'est de l'Afrique. Signalé dans le district de Salisbury, Mashonaland, par Marshall.

XVII. — Hirundinidés.

39. Hirundopuella. Tem. Schl.

Hir. puella Temminck, Schlegel, *Fauna Japon.*, p. 34 (1842) ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, 301 (1901) ; Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 413 (1903).

Un spécimen de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres ; 1er septembre 1904 (n° 30).

Nidifie dans les maisons comme l'hirondelle d'Europe. Elle arrive en février et repart en octobre. C'est la seule hirondelle qui vienne assiter aux feux de brousse pour s'y nourrir d'insectes.

Habite toute l'Afrique tropicale. Signalé à Zumbo, par Alexander, à Salisbury, par Marshall.

XVIII. — Muscicapidés.

40. Bradornis pallidus murinus Finsch.

Muscicapa pallida v. Müller, Naumann, p. 28 (1851)
Bradyornis mur. Finsch et Hartlaub, *Vög. Ost-Afr.* p. 866 (1870).
Bradornis pall. mur. Reichenow, *Vögel Afr.*, II. p. 436.
Bradyornis mur. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 239 (1901).

Une *femelle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, 750 mètres d'altitude; 14 janvier 1905 (n° 62).

Bec noir, pattes noires, œil noir avec bordure marron clair. Longueur totale, 0m,170.

Cet oiseau est insectivore et affectionne les fourrés.

Habite le sud de l'Afrique. Signalé à Salisbury, Mashonaland, par Marshall, et au nord du Zambèze, par Foa.

41. Tchitrea plumbeiceps (Rchw.).

Terpsiphone pl. Reichenow, *Werth. Mittl. Hochl. D. Ost Africa*, p. 275 (1898).
Tchitra pl. Reichenow, *Vögel Afr.*, II p. 510 (1903).

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Pungoué, altitude 750 mètres; 6 janvier 1905 (n° 55).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,214.

C'est un insectivore, qui vit dans les fourrés épais, comme *T. perspicillata*.

Habite le sud de l'Afrique. Les limites de son air d'habitat n'ont pas encore été précisées. Foa l'a collecté au nord du moyen Zambèze.

42. Tchitrea perspicillata (Sw.).

Muscipeta persp. Swainson, *B. W. Afr.*, II, p. 60 (1837).
Tchitrea persps. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 261 (1901); Reichenow, *Vögel Afr.* II, p. 508 (1903).
Le *Gobe-Mouche tchitrec* de Levaillant.

Un *mâle* du village de *Ganda*, au bord du Pungoué, à 33 mètres d'altitude; 26 septembre 1905 (n° 78).

Bec bleu, pattes gris bleu, œil noir à bordure marron; caroncule bleue près de l'œil. Longueur totale, 0m,372. Nom cafre, *Bombolo*.

Habite le sud-est de l'Afrique, probablement jusqu'au Zambèze ; au nord il serait représenté par la forme *E. persp. suahelica* (Rchw.).

Signalé à Salisbury par Marshall. C'est vraisemblablement à cette forme typique qu'il faut rapporter les spécimens collectés dans la vallée du Zambèze par Alexander et Meller, et à Tete, par Kirk.

43. Batis molitor (Hahn Küster).

Muscicapa molitor Hahn et Küster, *Vög. aus Asien*, etc., 20, Pl. 3 (1822).
Pachyprora molitor Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 255 (1901).
Batis mol. Reichenow, *Vög. Afr.*, II, p, 482 (1903).

Une *femelle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 28 septembre 1904 (n° 40).

Bec noir, pattes noires, œil noir à bordure jaune très clair.

C'est un insectivore qui affectionne les fourrés. Son cri ressemble assez exactement à celui du Rossignol des murailles d'Europe.

Habite le sud de l'Afrique, jusqu'au sud de l'Angola et au Zambèze. Signalé à Salisbury par Marshall, dans la vallée du Zambèze, par Alexander et Meller, à Tete et Chupanga, par Kirk, et dans le district de Beira (Stark).

XIX. — Pycnonotidés.

44. Pycnonotus layardi Gurn.

Pyc. lay. Gurney, *Ibis*, p. 390 (1879); Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 423 (1905); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 63 (1901).

Une *femelle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 25 juin 1904 (n° 4)

Œil noir, pattes noires, bec noir. Longueur totale, 0^{m},195 ; aile, 0^{m},091 ; queue, 0^{m},088.

Oiseau très commun, vivant de fruits, de graines et d'insectes. Siffle et crie.

Habite l'est de l'Afrique depuis le sud de l'Abyssinie (lac Abaja) jusqu'à la colonie du Cap. Signalé à Chupanga, à Tete, par Kirk, vallée du Zambèze, par Alexander, à Beira, Cavendish, à Salisbury, par Marshall, et à Chiquaqua, par Sowerby.

XX. — Timélides.

45. Crateropus jardinei kirki Sharpe.

Crat. jardinii. A. Smith. *Rep. Exp. Centr. Afr.*, p.45 (1836).
Crat. kirkii Sharpe, *Layards, Birds S. Afr.*, p. 215, 815 (1875).
Crat. jard. kirki Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 659 (1905).
Crat. kirki Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 57 (1901).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 20 juin 1906 (n° 96).

Bec noir, pattes grises, œil noir avec bordure jaune. Longueur totale, 0m,225; aile 0m,097, queue, 0m,099.

Cet oiseau est commun; il est sédentaire et vit en bandes. Quand il est surpris, il pousse des cris répétés qui constituent une sorte de ramage criard. Il est insectivore. Nom cafre, *Guengélé*.

Cette forme habite les territoires avoisinant le Zambèze et le lac Nyassa jusqu'à l'Est africain allemand.

Signalé à Tete, Sumba, sur le Zambèze, par Alexander, près du Zambèze, par Kirk, à Mapicuti, près Beira, par Cavendish.

XXI. — Turdidés.

46 Merula cabanisi ([Bp.] Cab.).

Turdus cab. (Bp.) Cabanis, *Mus. Hein.* I, p. 3 (1850); Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 687; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 177 (1901).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 2 juillet 1904 (n° 6).

Bec jaune avec le culmen noirâtre, pattes jaunes, œil noir à bordure marron. Longueur totale, 0m,205.

Ces oiseaux affectionnent les fourrés.

Habite les régions centrale et orientale du sud de l'Afrique. Cette espèce remplace *T. olivascens* au nord du fleuve Orange. N'avait pas encore été signalée dans le bassin inférieur du Zambèze.

47. Merula libonyana libonyana (A. Sm.).

Merula libonyana A. Smith, *Rep. Exp. Centr. Afr.*, p. 45 (1836).
Turdus lib. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 693; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 177 (1901).

Une *femelle* d'*Andrada*, vallée du Revoué; altitude 750 mètres; 7 juillet 1905 (n° 64).

Bec jaune corné, pattes jaunes, œil noir à bordure grise. Longueur totale, 0m,210.

Cet oiseau a les allures de la Grive.

L'espèce typique habite le sud-est de l'Afrique. Signalé à Salisbury, par Marshall. Au nord du Zambèze et près de la côte, vit la forme *T. lib. tropicalis* Ptrs, dont les parties supérieures sont plus brunâtres et la poitrine lavée d'orange (Voir Hellmayr, *J. f. O.*, p. 219, 1902).

48. Cossypha heuglini Hartl.

Coss. heugl. Hartlaub, *J. f. O.*, p. 36 (1866); Reichenow, *Vög. Afr.*, III, p. 758; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 211 (1901).

Un *mâle*, *Tendo du Pungoué*, affluent de l'Uréma, altitude 20 mètres; 3 septembre 1906 (n° 106).

Bec noir, pattes noires, œil noir à bordure marron très foncé.

Un *mâle* du village de *Cialima*, au bord du Mozambèze, affluent du Pungoué, altitude 45 mètres; 5 octobre 1905 (n° 80).

Les deux traits sourciliers, en avant de l'œil, sont bordés de noir en dessous et se rejoignent sur la ligne médiane du front.

Ce *Cossypha* est insectivore et vit dans les buissons et les fourrés, situés de préférence dans les ravins où coulent des ruisseaux.

Il possède un cri strident et pousse aussi un sifflement assez doux.

Habite de la vallée du Zambèze et du Transvaal jusqu'au Nil supérieur d'où provenait le type, et au Victoria-Nyanza. Signalé sur le Zambèze, de Chicowa à Zumbo, par Alexander, à Salisbury, Mashonaland, par Marshall.

49. Pratincola torquata (L.).

Muscicapa torq. Linné, *Syst. Nat.*, p. 328 (1766).

Pratincola torq. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 732; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 190.

Le *Traquet pâtre* de Levaillant.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 20 août 1904 (n° 20).

Œil noir, bec noir, pattes noires. Longueur totale, 0m,130.

Cet oiseau vit dans les fourrés et les grandes herbes.

Habite le sud de l'Afrique, d'une part jusqu'à l'Angola, d'autre part jusqu'au lac Nyassa. Signalé dans le Mashonaland, par Jameson, à Salisbury, par Marshall, à Chiquaqua, par Sowerby, dans la vallée du Zambèze, par Meller.

50. Saxicola pileata (Gm.).

Motacilla pileata Gmelin, *Syst. Nat.*, II, p. 965 (1788).
Saxicola pil. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 718 (1905).
Sax. pil. livingstonii Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 196 (1901).
Le *Traquet imitateur* de Levaillant.

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 5 janvier 1905 (n° 54).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,173. La bande frontale blanche est large.

Ces oiseaux vivent dans les Graminées et les bas taillis de la plaine du Revoué.

Habite l'est, le sud et le sud-ouest jusqu'au Benguella. Signalé à Tete par Kirk, à Tete, Mesananga et Zumbo, par Alexander, à Salisbury, par Marshall.

XXII. — Sylviidés.

51. Cisticola ruficapilla (A. Sm.).

Drymoica ruf. A. Smith, *Ill. Z. South Afr. Aves*, Pl. 73, fig. 1 (1842).
Cisticola ruf. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 565 (1905).

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 23 janvier 1906 (n° 90).

Bec jaune pâle, culmen foncé, pattes grises, œil noir à bordure marron. Longueur totale, 0m,099. Nom cafre, *Timba* ou *Matimbatimba*.

Il niche dans les Graminées ou les petits arbrisseaux. Son nid est fait de brins d'herbes, et il y dépose quatre à cinq œufs. Dans la saison des pluies, il évite que le nid soit mouillé, en tissant au-dessus un toit en forme de dôme composé de feuilles d'essences résineuses et maintenu au bord du nid par des filaments d'herbes passés dans les feuilles.

Habite du Natal au Mashonaland. Cette espèce ayant été très souvent réunie à *C. aberrans* (A. Sm.), il est difficile de préciser les localités où elle a été trouvée.

52. Cisticola semifasciata Rchw.

Cisticola semif. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 544 (1905).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 24 août 1904 (n° 23).

Bec marron, pattes jaunes, œil noir avec large bordure jaune clair. Longueur totale, 0m,135 ; aile, 0m,050 ; queue, 0m,055 ; bec, 0m011 à 0m,012 ; tarse, 0m,020.

Ce spécimen se distingue de *C. subrufficapilla* (A. Sm.) par sa gorge qui seule est blanche, tandis que le jugulum et l'abdomen sont d'un brun gris jaunâtre. Les sous-caudales sont d'un brun de rouille clair, les sous-alaires isabelles et les rectrices, sauf les deux médianes, ne portent une tache noire que sur la vexille interne.

Comme on le voit, les dimensions sont plus fortes que chez *C. muelleri* Alex. du Zambèze.

Cet oiseau vit dans les prairies à hautes herbes, et dans les buissons bas et touffus. Il est insectivore.

Habite les régions du lac Nyassa. Il n'a pas été signalé aussi au sud.

53. Apalis florisuga ([Lcht.] Rchw.).

Euprinodes florisuga (Lcht.) Reichenow, *J. f. O.*, p. 314 (1898).
Apalis flor. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 611 (1905).
Chlorodyta flavida, Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 125 (1901).

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres ; 5 juillet 1906 (n° 99).

Pattes jaunes, bec noir, œil noir à bordure jaune clair. Longueur totale, 0m, 108. Cette femelle n'a pas de tache pectorale *noire*.

Un *mâle*, *tendo du Sungoué*, affluent de l'Uréma, altitude 20 mètres ; 26 août 1906 (n° 104).

Bec noir, pattes noires, iris jaune très pâle.

Ce petit oiseau est insectivore et vit cantonné dans les buissons et les bas taillis.

Cette détermination m'a été confirmée par le professeur Reichenow.

Habite le sud-est de l'Afrique. N'a pas encore été signalé dans cette région. M. Foa a rapporté de la région des grands lacs immédiatement au nord du Zambèze moyen un spécimen (1) qui appartient à ce genre et paraît faire le passage entre cette forme et *A. neglecta* (Alex.), car il n'y a que la moitié postérieure du vertex qui soit verdâtre.

(1) Voir Oustalet, *Bull. Mus.*, 1898, p. 60 : *Eremomela elegans* (Heugl.), nom ind. Rimba.

54. Prinia mystacea Rüpp.

Pr. myst. Rüppell, *N. Wirb. Vög.*, p. 110 (1835); Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 590 (1905) ; Stark et Sclater , *Birds S. Afr.*, II, p. 135 (1901).

Un *mâle* de la plaine du *Revoué*, 750 mètres d'altitude (n° 49).

Bec gris, pattes grises, iris gris clair. Longueur totale, 0m,122.

C'est un insectivore qui affectionne les bas taillis. Son cri ressemble à celui du Roitelet triple bandeau d'Europe.

Habite toute l'Afrique au sud du Sahara, pourtant il n'a pas encore été collecté dans la colonie du Cap. Signalé à Beira, Mapicuti, par Cavendish, à Chiquaqua, par Sowerby, à Salisbury, par Marshall, dans la vallée du Zambèze, par Alexander, à Tete, par Kirk et Peters.

XXIII. — Prionopidés.

55. Prionops talacoma A. Sm.

Pr. tal. A. Smith, *Rep. Exp. Cent. Afr.*, 45 (1836) ; Reichenow, *Vögel Afr.*, II. p. 528 : Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 52 (1901).

Un *mâle* et une *femelle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètre; 16 juin 1904 (nos 1 et 2).

Bec noir, pattes rouges, œil noir à bordure jaune. Longueur totale 0m,195 et 0m,200.

Sédentaires et communs, vivent en bandes de six à dix individus.

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 10 juillet 1906 (n° 101).

Bec noir, pattes rouges, œil, noir, bordure très pâle, paupières jaunes. Nom cafre, *Timbo*.

Cet oiseau, qui paraît habiter la région toute l'année, vit en bandes de six à dix individus.

Il habite le sud de l'Afrique, mais n'a pas été recontré au sud du fleuve Orange; à l'ouest on le trouve jusqu'à l'Angola, à l'est jusqu'au lac Victoria Nyanza. Signalé à Salisbury, Mashonaland, par Marshall, dans la vallée du Zambèze, par Holub et Alexander, à Tete, par Peters et Kirk, à Mapicuti, par Cavendish, au nord du moyen Zambèze, par Foa.

56. Sigmodius retzi tricolor (G. R. Gray).

Prionops retzii Wahlberg, *Oefvers. k. Vet. Akad. Forh.*, Stockholm, p. 174 (1856).
Prionops tricolor Gray, *P. Z. S.* p. 45 (1864).
Sigmodus retzii tricolor Reichenow *Vögel Afr.*, II, p. 535 (1903).
Sigmodus tricolor Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 50 (1901).

Une *femelle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 21 janvier 1905 (n° 65).

Bec et pattes rouges, œil marron à bordure d'un jaune d'or plus vif vers la périphérie, caroncule rouge autour de l'œil. Longueur totale 0m,211.

Cet oiseau est assez rare et vole à peu près comme la huppe.

Habite l'est de l'afrique depuis le Pangani et Mombosa jusqu'au Transvaal. Signalé à Mapicuti par Cavendish, sur le bas Chiré, à Tete, Chupanga, Tschibisa, par Kirk, dans la vallée du Zambèze, par Alexander, à Salisbury, par Marshall.

XXIV — Laniidés.

59. Lanius collaris L.

Lan. coll. Linné, *Syst. Nat.* I, p. 135 (1766); Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 607; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 6 (1901).
Le *Fiscal* de Levaillant.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 23 septembre 1904 (n° 36).

Bec noir, pattes noires, œil noir à bordure jaune.

C'est un insectivore, vivant dans les montagnes en terrains couverts d'une faible végétation ou d'arbres rabougris.

Habite le sud de l'Afrique jusqu'au Mossamedes, d'une part, et au lac Nyassa, d'autre part. Signalé à Salisbury, par Marshall.

58. Malaconotus olivaceus starki (W. Scl.).

Mal. olivaceus Vieillot, *Nouv. Dict.*, XXVI, p. 135 (1818).
Laniarius starki W. L. Sclater, *Ibis*, p. 135 (1901); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 41 (1901).
Mal. olivaceus starki Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 603 (1903).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 6 août 1904 (n° 12).

Bec noir, pattes noires, œil noir à bordure jaune. Longueur totale, 0m,215.

Cet oiseau vit isolé et semble avoir les habitudes de la Pie-grièche.

Son cri se compose d'un sifflement court, suivi immédiatement d'un bruit imitant le clappement de la langue.

Habite l'est et le sud de l'Afrique depuis le Victoria-Nyanza jusqu'au Cap. Signalé dans la vallée du Zambèze, par Kirk et Alexander, à Chiquaqua, par Sowerby, à Salisbury, Mashonaland, par Marshall.

59. Laniarius major mossambicus (Rchw.).

Telephonus major Hartlaub, *Rev. Zool.*, p. 108 (1846).
Dryoscopus maj. moss. Reichenow, *J. f. O.*, p. 141 (1880).
Laniarius maj. moss. Reichenow, *Vög. Afr.*, II, p. 581.
Dryoscopus moss. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 29 (1901).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, 1.120 mètres d'altitude ; 14 juillet 1904 (n° 21).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,220; aile, 0m,085; queue, 0m,104.

Cet oiseau est commun et sédentaire dans les fourrés. C'est un insectivore. Il peut émettre une quantité de cris, depuis une sorte de grincement jusqu'à l'imitation du bruit que fait un marteau frappant la tôle dans le lointain.

Cette forme, plus petite que la forme typique, habite la région côtière de l'est de l'Afrique, depuis l'Afrique orientale allemande jusqu'au Mozambique. Elle a été signalée au Mozambique, par Fischer, à Tete et Chicowa, sur le Zambèze, par Alexander, à Salisbury, par Marshall.

60. Laniarius sulfureopectus similis (A. Sm.).

Malaconotus sulf. Lesson, *Traité Ornith.*, p. 373 (1831).
Mal. similis A. Smith, *Rep. Exp. Cent. Afr.*, p. 44 (1836).
Chlorophoneus sulf. sim. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 563 (1903).
Laniarius sulfureipectus Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 40 (1901).

Un *mâle* juv. de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres ; 26 septembre 1904 (n° 41).

Bec noir, pattes noires, œil noir à bordure rouge pâle. Longueur totale, 0m,180 ; aile, 0m,084 ; queue, 0m,087.

C'est un oiseau insectivore qui vit dans les plaines et les taillis.

Ce spécimen paraît intermédiaire entre *L. sulfureopectus chrysogaster* et *L. s. similis*. Le trait sourcilier jaune dépasse à peine l'œil, le front est jaune clair, la région auriculaire grise, à reflet plus foncé que la tête, et la tache orangée du jugulum rejoint de chaque côté le gris de la nuque.

Habite le sud de l'Afrique. Signalé dans la vallée du Zambèze par Alexander, à Tete, par Kirk, et au nord du moyen Zambèze, par Foa.

61. Dryoscopus cubla (Shaw).

Lanius cubla Shaw, *Gen. Zool.*, VII, p. 328 (1809).
Dryoscopus c. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 593; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 25 (1901).
Le *Cubla* de Levaillant.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 24 septembre 1904 (n° 37).

Bec noir, pattes rouges, œil noir à bordure rouge. Longueur totale, 0m,154.

Cet oiseau est insectivore et se plaît dans les fourrés épais. Son cri se compose d'une sorte de grincement suivi immédiatement d'un sifflement court et fort.

Le Cubla habite l'est de l'Afrique depuis la colonie du Cap jusqu'au Zambèze. Signalé près de Salisbury par Marshall, à Tete, par Kirk, et dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

62. Pomatorhynchus senegalus (L.).

Lanius senegalus Linné, *Syst. Nat.*, I, p. 137 (1766).
Pomatorhynchus senegalus Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 547.
Telephonus senegalus Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 19 (1901).
La *pie-grièche à tête rousse du Sénégal* de Levaillant.

Une *femelle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 31 décembre 1904 (n° 53).

Bec noir, pattes grises, œil noir à bordure grise. Longueur totale, 0m,232.

Insectivore. Assez commun dans les plaines du Revoué.

Habite toute l'Afrique au sud du Sahara, mais pas le nord-est. Signalé à Salisbury, à Chupanga, sur le bas Zambèze, par Kirk, à Beira, par Cavendish, et à Zumbo, par Alexander.

63. Pomatorhynchus tschagra (Vieill.).

Thamnophilus tschagra Vieillot, *Nouv. Dict.*, III, p. 317 (1816).
Pomatorhynchus ts. Reichenow, *Vögel Afr*, II, p. 543.
Telephonus ts. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 21 (1901).
Le *Tschagra* de Levaillant.

Une *femelle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres, 7 juillet 1904 (n° 9).

Iris marron, bec noir, pattes noires. Longueur totale, 0m, 203; aile, 0m,074; queue, 0m,090.

Cet oiseau, qui affectionne la lisière des bois, vit de sauterelles et d'insectes. Son cri est une sorte de caquet.

Habite le sud de l'Afrique jusqu'au Natal et au Transvaal.

Il n'avait pas encore été signalé dans cette région.

XXV. — Paridés.

64. Pentheres niger niger (Bonn. et Vieill.).

Parus nige. Vieillot, *Nouv. Dict. H. N.*, XX, p. 325 (1818); Reichenow, *V. Afr.*, III, p. 510; Stark et Sclater, I, p. 307 (1900).
La *Mésange noire* de Levaillant.

Un *mâle* de *Guengère*, 40 mètres d'altitude; 5 juillet 1906 (n° 100). Nom cafre, *Timboué*.

Bec noir, pattes noires, iris marron clair. Longueur totale, 0m,161.

Rare. Insectes et graines dans le gésier.

Habite le sud de l'Afrique, jusqu'au Cunene à l'ouest et au Pangani à l'est. Signalé dans le Mashonaland, par Jameson et Ayres; à Tete, par Kirk; dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

XXVI. — Zostéropidés.

65. Zosterops anderssoni Shelley.

Zost. and. Shelley, *Br. Ornith. Club*, II (nov. 1892); Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 429; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.* I, p. 300 (1900).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres, 5 juillet 1904 (n° 8).

Bec noir, pattes noires, œil blanc, pourtour de l'œil blanc. Longueur totale, 0m, 115; aile, 0m,60; queue, 0m, 045; bec, 0m,010.

Cet oiseau a un peu les mœurs du Pouillot d'Europe.

Habite le sud-ouest de l'Afrique et le sud-est, du lac Nyassa au Transvaal. Signalé à Salisbury, Mashonaland, par Alexander.

XXVII. — Nectariniidés.

66. Cinnyris venustus niassæ (Rchw.).

Certhia venusta Shaw, *Nodd. Nat. Miscell.*, X, Pl. 369 (1799).
Cin. affinis niassæ Reichenow, *Orn. Monatsb.*, p. 171 (1899).
Cinnyris venustus niassæ Reichenow, *Vög. Afr.*, III, p. 674 (1905).

Un *mâle* jeune de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 1er août 1904 (n° 15).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,095.

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 15 janvier 1905 (n° 61).

Cette forme est peu distincte de *C. venustus* typique.

Elle habite les environs du lac Niassa. Reichenow pense que les spécimens collectés par Alexander à Zumbo, sur le Zambèze, doivent être rapportés à cette forme.

67. Chalcomitra gutturalis (L.).

Certhia gutt. Linné, *Syst. Nat.*, p. 186 (1766).
Cinnyris gutt. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 286 (1900).
Chalcomitra gutt. Reichenow, *Vög. Afr.*, III, p. 464 (1905).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, 1.120 mètres d'altitude, 26 juin 1904 (n° 3).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,108.

Un *mâle* jeune de la vallée du *Muza*, 1.120 mètres d'altitude; 3 juillet 1904 (n° 7).

Bec noir, pattes noires, œil noir. La gorge commence à se teinter de rouge.

Cette espèce se rencontre ordinairement par couple.

Habite l'est de l'Afrique depuis le Natal jusqu'à l'Abyssinie. Signalé à Mapicuti, par Cavendish, à Salisbury, par Marshall, à Chiquaqua, par Sowerby, à Tete, Chupanga, par Kirk, sur le Zambèze, par Meller, à Zumbo, par Alexander.

68. Chalcomitra kirki (Shell.).

Cinnyris kirki Shelley, *Mon. Nect.*, p. 273, Pl. 85 (1876) ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I p. 289 (1900).
Chalcomitra k. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 460 (1905).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres, 4 août 1904 (n° 17).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,097. Se reconnaît facilement à l'absence de couleurs métalliques aux susscaudales.

Habite le sud de l'Afrique, du Kikuja au Limpopo. Signalé à Zumbo, par Alexander, à Chupanga, par Kirk, à Mapicuti, par Cavendish, à Chiquaqua, par Sowerby, à Salisbury, par Marshall.

69. Cyanomitra olivacea (A. Sm.).

Cinnyris ol. Smith, *Ill. Zool. S. Afr., Birds*, Pl. 57 (1839); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 293 (1900).
Chalcomitra ol. Reichenow, *Vög. Afr.*, III, p. 449 (1905).

Un *mâle* (?) jeune de la vallée du *Muza*, 1.120 mètres d'altitude; 30 septembre 1904 (n° 41).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Les lores sont blanc jaunâtre. Longueur totale, 0m,145; bec, 0m,0235.

Habite le sud-est de l'Afrique. Signalé à Salisbury, par Marshall.

70. Anthotreptes collaris hypodilus (Jard.).

Nectarinia collaris Vieillot, *Nouv. Dict.*, XXXI, p. 502 (1819).
Nect. hypodilus Jardine, *Contr. ornith.*, p. 153 (1831).
Anthotr. coll. hyp. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 298 (1900).
Anthreptes coll. hyp. Reichenow, *Vög. Afr.*, III, p. 443 (1905).
Le *Sucrier à cordon bleu* de Levaillant.

Un *mâle* juv. et un *mâle* ad. de la vallée du *Muza*, 1.120 mètres d'altitude; 30 juillet et 17 août 1904 (nos 10 et 14).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,090 et 0m,084. Sur le jeune, les barbes terminales des plumes de la gorge seules sont vertes; le demi-collier violet n'existe pas encore.

Habite l'Afrique tropicale du Sénégal à l'Angola, et du Nil blanc au Zambèze. Signalé à Chupanga et Sena, par Kirk, à Mapicuti, près Beira, par Cavendish.

XXVIII. — Motacillidés.

71. Anthus lineiventris Sund.

Anthus lin. Sundevall. *Oefv. Ak. Förh.*, p. 100 (1850); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 245; Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 309.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 27 juin 1904 (n° 5).

Bec jaune, pattes jaunes, œil noir. Longueur totale, 0m,175.

Oiseau qui se plaît dans les prairies montagneuses et les bas taillis.

Habite le sud de l'Afrique. A l'ouest sa présence a été signalée jusqu'à l'Angola et à l'est jusqu'au nord du lac Nyassa. N'avait pas encore été collecté dans le bassin du Pungoué. Je dois cette détermination à l'obligeance de M. le professeur Reichenow de Berlin.

72. Macronyx croceus (V.).

Alauda crocea Vieillot, *Nouv. Dict. H. nat.*, I. p. 305 (1816).
Mac. croc. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I. p. 239 (1900); Reichenow, *Vögel Afr.* III, p. 321 (1905).

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 17 février 1905 (n° 66).

Mandibule supérieure noirâtre, l'inférieure est couleur cornée, pattes grises, iris marron clair. Longueur totale, 0m,205.

Cet oiseau vit dans les plaines du Revoué.

Habite l'ouest de la Sénégambie à l'Angola, et l'est du Nil blanc supérieur au Natal. Rare dans la colonie du Cap. Signalé dans la vallée du Zambèze par Meller, à son embouchure, par Kirk, à Sena, par Alexander, à Beira, par Cavendish.

XXIX. — Fringillidés.

73. Serinus sharpei Neum.

Ser. sharpei Neumann, *J. f. O.* p. 287 (1900); Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 266 (1905).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 1er septembre 1905 (n° 75).

Mandibule supérieure noirâtre, l'inférieure est jaunâtre ; pattes gris brun, iris marron. Longueur totale, 0m,145.

Habite l'est de l'Afrique, du lac Victoria au Zambèze. Signalé à Tete par Kirk. Son aire d'habitat s'étend donc au sud du Zambèze.

XXX. — Plocéidés.

74. Vidua serena L. [= V. principalis (L.)].

Emberiza serena Linné, *Syst. Nat.* p. 312 (1866).
Vidua princ. Stark et Sclater *Birds S. Afr.*, I, p. 145 (1900).
Vidua serena Reichenow, *Vög. Afr.*, III, p. 219 (1905).
La *Veuve dominicaine* de Vieillot.

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 26 décembre 1905 (n° 88).

Bec rouge, pattes grises, iris rouge. Longueur totale, 0m,287.

Vit en petites bandes de quatre à sept individus. M. Vasse l'a souvent observé aux grandes altitudes.

Habite presque toute l'Afrique au sud du Sahara. Signalé à Salisbury par Marshall, dans la vallée du Zambèze, par Meller et Alexander, à Tete, par Kirk.

75. Steganura paradisea (L.).

Emberiza par. Linné, *Syst. Nat.*, p. 178 (1758).
Vidua par. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, p. 149 (1900).
Steganura par, Reichenow, *Vögel Afr.* III, p. 223 (1905).
La *Veuve au colllier d'or* de Vieillot.

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 10 février 1905 (n° 63). Bec noir, pattes noires, iris marron clair. Longueur totale, 0m,278.

Cet oiseau est granivore. Il niche dans les Graminées en janvier-février.

Habite l'Afrique au sud du Sahara et de l'Abyssinie. Signalé à Tete par Kirk, dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

76. Coliostruthus ardens (Bodd.).

Fringilla ardens Boddaert, *Tabl. Pl. Enl.*, 39 (1783).
Coliopasser ardens Stark et Sclater, *Birds S. Afr.* I, p. 147.
Coliuspasser ardens Reichenow, *Vögel Afr.* III, p. 135 (1904).

Un *mâle* d'*Andraba*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 8 janvier 1905 (n° 57).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,350.

Une *femelle* de la vallée du *Muza*, 1.120 mètres d'altitude; 14 septembre 1904 (n° 27).

Bec gris, pattes jaunes, œil noir. Longueur totale 0m 135.

Oiseau vivant en bandes assez nombreuses dans les plaines couvertes de Graminées sur lesquelles il aime à se percher pour en manger les graines. Il nidifie dans les Graminées de janvier à février.

Habite le sud de l'Afrique jusqu'au cours supérieur du Kir et jusqu'à Congo et à l'Angola. Signalé à Salisbury par Marshall, à Chupanga et Zumbo, par Alexander, à Tschibisa, par Kirk.

77. Urobrachya axillaris (Smith),

Vidua axill. A. Smith, *Ill. Zool. S. Afr., Birds*, Pl. II (1838).
Urobrachya axill. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.* II, p. 134; Reichenow, *Vögel Afr.* III, p. 129.

Un *mâle* du *Tendo de l'Uréma*; 10 mars 1907 (n° 108).

Bec gris bleuté, pattes noires, iris marron très foncé.

Habite le sud de l'Afrique jusqu'au Zambèze. Signalé à Mapicuti par Cavendish.

78. Pyromelana flammiceps (Sw.).

Euplectes flammiceps Swainson, *W. Afr.*, p. 186, Pl. 23 (1837).
Pyr. fl. Reichenow *Vögel Afr.*, III, p. 118 (1904).

Un *mâle* de *Guengère*, 40 mètres d'altitude; 14 février 1906 (n° 91), nom cafre, *Jojotcho*.

Bec noir, pattes grises, œil noir à bordure gris clair. Longueur totale, 0m,135.

On le trouve en plumage de noces en décembre; nidifie en février, en colonies. Le nid est placé généralement aux extrémités des branches de Mimosas, probablement pour éviter les serpents.

Habite l'ouest de l'Afrique depuis la Gambie jusqu'au Cuenza, et l'est, de l'Abyssinie au Zambèze. Signalé dans la vallée du Zambèze, par Alexander. Son aire d'habitat descend donc plus au sud.

79. Pyromelana capensis xanthomelas Rüpp.

Euplectes xanth. Rüppell, *N. Wirb. Vögel*, p. 94 (1835).
Pyromelana cap. xanthomelaena Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 133.
Euplectes xanthomelas Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 128.

Un *mâle d'Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 9 janvier 1905 (n° 58).

Mandibule supérieure noire, mandibule inférieure blanc jaunâtre, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,133.

Une *femelle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, 750 mètres d'altitude; 10 janvier 1905 (n° 59).

Bec gris, pattes grises. Longueur totale, 0m,125.

Cet oiseau vit dans les plaines à Graminées élevées, sur lesquelles il aime à se percher pour en manger les graines.

Habite l'est de l'Afrique jusqu'au Mashonaland, ainsi que le sud-ouest de l'Afrique. Signalé à Chiquaqua, par Sowerby, à Salisbury, par Marshall.

80. Spermestes scutatus Heugl.

Sperm. scut. Heuglin, *J. f. O.* (1863), p. 18.
Spermestes scutatus Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 112; Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 150.

Un *mâle* et une *femelle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 17 août 1904 (nos 18 et 19).

Mandibule supérieure noire, mandibule inférieure gris ardoisé; pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,081 et 0m,079.

Il vit en bandes dans les prairies à Graminées et se nourrit de leurs graines.

Habite l'Afrique, de l'Abyssinie au Natal, et les îles Comores. Signalé dans la vallée du Zambèze, par Meller.

81. Hypargus niveoguttatus (Peters).

Spermophaga niveoguttata Peters, *J. f. O.*, p. 133 (1868).
Lagonosticta niv. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 95.
Hypargos niveoguttata Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 157.

Une *femelle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 14 août 1904 (n° 16).

Bec gris bleu, pattes jaune foncé, œil noir à bordure grise. Longueur totale, 0m,120.

Il vit dans les broussailles où il mange des insectes et des graines. Son cri ressemble à celui de la Mésange huppée.

Habite l'est de l'Afrique, de Taita jusqu'au sud de l'Afrique portugaise. Signalé à Tete, par Alexander, à Mapicuti, par Cavendish.

82. Lagonosticta brunneiceps Sharpe.

Lagon. brun. Sharpe, *Cat. B. Brit. Mus.*, XIII, p. 213 (1890); Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 196; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 94.

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude; 2 septembre 1905 (n° 76).

Bec gris et corail, pattes grises, iris rouge. Longueur totale, 0m,105.

Granivore ; assez commun.

Habite l'est et le sud de l'Afrique. Signalé à Tete, par Kirk, et dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

83. Zonogastris melba (L.).

Fringilla melba Linné, *Syst. Nat.*, p. 180 (1758).
Pytilia melba Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 89.
Pytilia melba Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 163.
Zonogastris m. Sharpe, *Hand-list*, V. p. 434 (1909).

Un *mâle* et une *femelle* d'*Andrada*, vallée du Revoué; 7 et 12 janvier 1905; altitude, 750 mètres (nos 56 et 60).

Bec corail, pattes grises, iris rouge brique. Longueur totale, 0m,130 et 0m,120.

Vit dans les plaines où il se nourrit d'insectes et des graines des Graminées. Assez commun.

Habite l'est de l'Afrique, du lac Victoria-Nyanza et de Witu jus-

qu'au Natal et à l'ouest, de Loango au Damara. Signalé à Tete, par Kirk, dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

84. Hypochœra amauropteryx Sharpe.

Hyp. am. Sharpe, *Cat. B. Brit. Mus.*, XIII, p. 309 (1890).
Hyp. funerea amauroptera Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 153.
Hyp. am. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 215.

Un *mâle* de *Guengère*, 27 avril 1906 (n° 93).

Bec ivoire, pattes jaunes, iris marron clair. Nom cafre, *Chenga*. Longueur totale, 0m,122.

Assez rare. Il nidifie souvent en colonies avec le *Pyromelana flammiceps* (Sw.).

Habite l'est et le sud de l'Afrique. A l'ouest, on le trouve dans l'Angola et le Congo. Signalé à Sumba par Alexander, à Tete, par Kirk, et près du Zambèze par Bradshaw.

85. Estrilda astrild cavendishi Sharpe.

Estrilda cavendishi Sharpe, *Ibis*, p. 110 (1900).
Est. astrild cav. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 179 (1904).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres ; 16 octobre 1905 (n° 83).

Bec corail, pattes noires, iris orangé. Longueur totale, 0m,102.

Granivore. Assez commun.

Cette forme n'a été signalée qu'à Inhambane, par Peters, et à Mapicuti, près Beira, par Cavendish.

86. Estrilda incana Sund.

Estrilda incana Sundevall, *Œfv. Vet. Ak. Förh.*, p. 98 (1850) ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 101 ; Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 192.

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude ; 28 août 1905 (n° 71).

Bec gris bleu, pattes noires, œil noir à bordure rouge. Longueur totale, 0m,120.

Vit en bandes et paraît affectionner les arbres en fleurs.

Habite le sud-est de l'Afrique. N'a pas encore été signalé dans les vallées du Zambèze et du Pungoué.

87. Uraeginthus bengalus angolensis (L.).

Fringilla bengalus Linné, *Syst. Nat.*, p. 182 (1758).
Fringilla angolensis Linné, *Syst. Nat.*, p. 182 (1758).
Estrilda angolensis Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 102 (part.).
Ur. beng. ang. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 209.

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 16 octobre 1905 (n° 82).

Pattes grises, œil noir à bordure orange. Le culmen, les tomias et le gonys sont seuls noirâtres, le reste est plus ou moins rosé.

Granivore.

Habite le sud-est du lac Nyassa, le Natal et l'Angola. Signalé près du Zambèze, par Alexander et Holub, à Tete, par Kirk et Peters, à Salisbury, par Marshall, et à Mapicuti, par Cavendish.

88. Sycobrotus stictifrons (Fischer Rchw.).

Symplectes st. Fischer et Reichenow, *J. f. O.*, p. 373 (1885).
Sycobrotus st. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 73.
Ploceus (Symplectes) st. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 33.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, 1.120 mètres d'altitude; 30 août 1904 (n° 29).

Bec gris bleu, pattes jaunes, œil noir à bordure rouge. Longueur totale, 0^{m},160.

Vit dans les fourrés où il se nourrit d'insectes et de fruits de lianes. Son chant rappelle celui du Pinson d'Ardennes.

Habite l'est de l'Afrique. N'a pas encore été signalé dans la région du Zambèze, mais Foa l'a récolté au nord du moyen Zambèze.

89. Hyphanturgus ocularius (Sm.).

Ploceus ocularius A. Smith, *Proc. S. Afr. Inst.* (1828), nov.; *Ill. Zool. S. Afr.*, Pl. 30 (1839).
Ploceus (Hyphanturgus) oc. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 45.
Sitagra ocularia, Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 66.

Un *mâle* du *tendo du Pungoué*, 20 mètres d'altitude; 9 septembre 1906 (n° 105).

Bec noir, pattes noires, iris jaune très pâle. Vit de fruits et de graines.

Habite le sud-est de l'Afrique, depuis le Zambèze jusqu'au Cap. Signalé dans le bassin du Zambèze, par Kirk et Alexander.

90. Hyphantornis nigriceps Layard.

Hyph. nigr. Layard, *B. S. Afr.* (1867), p. 180; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 56.
Ploceus (*Hyphantornis*) *nigr.* Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 62.

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude; 7 décembre 1905 (n° 86).

Bec mi-partie noire, mi-partie jaune, pattes jaunes, iris rouge. Longueur totale, 0m,145.

Niche en colonies aux extrémités des branches de Mimosas.

Habite le sud de l'Afrique jusqu'à l'Angola et au Victoria-Nyanza. Signalé près du Zambèze par Alexander, et Chapmann, au nord du moyen Zambèze, par Foa, à Tete, par Kirk.

91. Sitagra subaurea (A. Sm.).

Ploceus sub. A. Smith, *Pr. S. Afr. Inst.*, 1832, avril; *Ill. Zool. S. Afr.*, *Birds*, Pl. 30 (1841).
Hyphantornis subaur. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 63.
Ploceus (*Xanthophilus*) *subaur.* Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 90.

Un *mâle* d'*Andrada*, plaine du Revoué; 750 mètres d'altitude; 19 décembre 1904 (n° 48).

Bec gris jaune, pattes noires, œil noir, bordure orange. Longueur totale, 0m,158.

Habite le sud-est de l'Afrique. Pas signalé dans la région du Pungoué.

92. Sitagra cabanisi (Peters).

Hyphantornis cab. Peters, *J. f. O.*, p. 133 (1868); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 57.
Ploceus (*Sitagra*) *cabanisi* Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 73.

Un *mâle* du *tendo du Pungoué*, affluent de l'Uréma, altitude 20 mètres; 21 août 1906 (n° 103).

Bec noir, pattes noires, œil noir à bordure jaune pâle. Les Cafres n'ont pu dire son nom à M. Vasse.

Mange des graines et des insectes.

Habite l'est et le sud-ouest de l'Afrique. Signalé dans la vallée du Zambèze, par Alexander, au nord du moyen Zambèze, par Foa.

XXXI. — Sturnidés.

93. Perissornis carunculatus (Gm.).

Gracula carunculata Gmelin, *Syst. Nat.*, I, p. 399 (1788).
Dilophus car. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 23 (1900).
Perissornis car. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 670 (1903).
Le *Porte-lambeaux* de Levaillant.

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres ; 30 août 1905 (n° 74).

Bec marron noirâtre, pattes gris plombé. Longueur totale, 0m,210.

Vit en bandes, comme l'Etourneau, dont il a le vol.

Habite les steppes sud-orientales de l'Afrique et le sud de l'Arabie. Signalé à Chicowa, sur le Zambèze, par Alexander, à Tete, par Kirk, à Salisbury, par Marshall.

XXXII. — Eulabétidés.

94. Cinnyricinclus leucogaster verreauxi [(Boc.) Finsch Hartl.].

Pholidauges leucogaster Gmelin, *S. Nat.*, II, p. 819 (1788).
Pholidauges verreauxi Bocage *in* Finsch et Hartlaub, *Vögel Ost-Afr.*, p. 867 (1870).
Phol. leuc. verr. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 44 (1900).
Cinn. verr. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 680 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué; 25 décembre 1905 (n° 87).

Bec noir, pattes noires, iris jaune clair. Longueur totale, 0m,180. La couleur blanche de la vexille externe sur la rectrice externe s'arrête à un centimètre de l'extrémité.

Cet oiseau paraît très rare, car M. Vasse ne l'a aperçu qu'une seule fois.

Habite le sud et l'est de l'Afrique depuis le fleuve Orange jusqu'au Congo et à l'Ouganda. Signalé dans le Mashonaland, par Ayres et Jameson, à Salisbury, par Marshall, à Tete, par Kirk, dans le Mozambique, par Sperling.

95. Lamprocolius chalybaeus sycobius [Peters] Hartl.

Lamp. chal. Hemprich Ehrenberg *Symb. Phys* , fol. Y, Pl. 10 (1828).
Lamp. sycobius [Peters] Hartlaub, *J. f. O.*, p. 19 (1859) ; Stark et Sclater, *Birds S. Af.*, I, p. 41 (1900).
Lamp. chal. syc. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 688 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, 40 mètres d'altitude; 23 avril 1906 (n° 92).

Bec noir, pattes noires, iris orange. Longueur totale, 0m,210, aile,

0m, 114, queue, 0m,075, bec, 0m,018, tarse, 0m,026. Dimensions plus petites que celles de *L. chal.* typique.

Ces oiseaux vivent en bandes nombreuses et sont très farouches. Ils sont amateurs de piment. Leur vol rappelle celui de l'Etourneau. Ils semblent être de passage dans la région; les bandes apparaissent au commencement de novembre, et elles se séparent en janvier, après l'appariement pour la construction des nids.

Habitent l'est et l'ouest de l'Afrique jusqu'au Mossamedès et à Mombas. Signalé à Tete, par Peters, Kirk et Alexander, à Salisbury, par Marshall.

XXXIII. — Oriolidés.

96. Oriolus larvatus rolleti Salvad.

Oriolus larvatus Lichstenstein, *Verz. Doubl.*, p. 20 (1823).
Oriolus rolleti Salvadori, *Atti Soc. Ital. Sc. nat.*, VII, p. 161 (1864).
Or. larv. roll. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 659 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude; 12 août 1905 (n° 70).

Bec gris bleu, pattes noires, iris rouge. Longueur totale, 0m,220; aile, 0m,125; queue, 0m,085; bec, 0m,023; tarse, 0m,021.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 6 septembre 1904 (n° 33).

Bec gris rosé, pattes noires, œil noir à bordure rouge. Longueur totale, 0m,230; aile, 0m, 130; queue, 0m,085; bec, 0m,024; tarse, 0m,024. Le noir de la tête s'étend plus bas sur la nuque et le jugulum.

Assez rare partout. Frugivore et insectivore. Il vit dans les ravins. M. Vasse l'a rencontré une fois en pays montagneux, à 1.100 mètres d'altitude, dans le Manica.

Habite le sud-ouest et l'est de l'Afrique. Signalé à Tete et à l'embouchure du Zambèze, par Kirk, au nord du moyen Zambèze, par Foa, à Sena, sur le bas Zambèze, par Alexander, à Chiquaqua, par Sowerby, à Salisbury par Marshall.

XXXIV. — Dicruridés.

97. Buchanga assimilis (Bechst).

Corvus assimilis Bechstein, *Lath. Allg. Uebers.* II, p. 562; voir Oberholser, *Proc. U. S. Nat. Mus.*, vol. XXVIII, p. 919 (1905).
Dicrurus afer Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 265 (1901); Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 647 (1903).
Le *Drongear* de Levaillant.

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres ; 27 décembre 1904 (n° 51).

Bec noir, pattes noirs, œil noir à bordure rouge. Longueur totale, $0^{m},246$.

Oiseau insectivore, commun dans tout le territoire à toutes les altitudes.

Habite presque toute l'Afrique au sud du Sahara. Signalé à Salisbury (« Mindirira »), par Marshall, à Chiquaqua, par Sowerby, à Tete, par Peters et Kirk, au nord du moyen Zambèze, par Foa, et au Mozambique, par Cardoso.

LISTE DES PRINCIPAUX OUVRAGES RÉCENTS CONSULTÉS

1864. Kirk, John, *On the Birds of the Zambesi Region of Eastern tropical Africa* (*Ibis*, p. 307 à 339).

1882. Shelley et Ayres, *On a Collection of Birds made by Mr. J. S. Jameson in South-Eastern Africa*, with notes by Mr. T. Ayres, by Captain G., E. Shelley (*Ibis*, p. 236 à 265, p. 349 à 368, Pl. VII).

1898. Sowerby, J. L., *On a Collection of Birds from Fort Chiquaqua, Mashonaland*, with notes by R. B. Sharpe (*Ibis*, p. 567 à 575, Pl. XII).

1899. Alexander, *An Ornithological Expedition to the Zambesi River* (*Ibis*, p. 549 à 584, Pl. XI).

1900. Alexander, *Ibis*, p. 70-109, Pl. I ; p. 424 à 458.

1900. Sharpe, Bowdler, *On a Collection of Birds obtained by Mr. H. S. H. Cavendish in Mozambique* (*Ibis*, p. 109 à 115).

1900. Marshall, Guy, A. K., *Notes on Mashonaland Birds* (*Ibis*, p. 221 à 271).

1900-1906. Stark (completed by W. L. Sclater), *The Birds of South Africa*, t. I, 1900 ; II, 1901 ; III, 1903 ; IV, 1906.

1900-1905. Reichenow, Ant., *Die Vögel Africas*, I, 1900-1901 ; II, 1902-1903 ; III, 1904-1905.

Catalog of Birds of Bristish Mus., divers volumes.

1899-1909. Sharpe, *Hand-list of the genera and species of Birds.*

PRÉSENTATION A LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

Par M. Ernest LEBON

DE SON OUVRAGE (1) INTITULÉ :

SAVANTS DU JOUR :

ÉMILE PICARD, BIOGRAPHIE, BIBLIOGRAPHIE DES ÉCRITS

Séance du 23 *Juillet* 1910.

En présentant ce Livre à l'Académie des Sciences, dans la Séance du 20 juin 1910, M. GASTON DARBOUX, secrétaire perpétuel, s'est exprimé en ces termes :

« J'ai l'honneur de présenter à l'Académie un nouveau volume de la Collection des *Savants du jour* entreprise par M. Ernest Lebon. Ce volume est consacré au Président actuel de l'Académie des Sciences, M. EMILE PICARD.

« Comme les volumes précédents, celui-ci se recommande par une abondance dans les informations, une sûreté dans les renseignements de toute nature qui feront de la Collection de M. E. Lebon le guide le plus précieux pour les futurs historiens de la Science.

« J'y signalerai plus particulièrement la charmante Notice biographique qui ouvre le volume. Elle nous fait connaître la jeunesse de M. EMILE PICARD, ses premières études et ses succès, puis ses découvertes et les principaux incidents de sa belle carrière scientifique. Elle insiste, comme il convient, sur les incursions que notre Président a faites dans le domaine de la philosophie des sciences et, plus particulièrement, sur le beau Rapport qu'il fut amené à écrire en 1900 sur l'ensemble du progrès scientifique, à la demande du Commissaire général de l'Exposition universelle internationale, notre confrère Alfred Picard. »

J'ai fait précéder la Section des *Fonctions et Surfaces algébriques* d'appréciations dues à MM. HENRI POINCARÉ et FEDERIGO ENRIQUEZ, et la Section de *Philosophie scientifique et Histoire des Sciences*

(1) Un volume in-8 (28-19) de VIII-80 pages, papier de Hollande, avec un portrait en héliogravure. 1er juin 1910.

d'appréciations dues à MM. Alfred Picard et Lucien Poincaré, afin de faire connaître mieux l'Œuvre de M. Emile Picard et de faire oublier la sécheresse inévitable de suites d'énumérations de titres d'Ecrits, bien que ces titres soient le plus souvent accompagnés de sobres explications.

Il importe de faire remarquer que M. Emile Picard, après avoir lu mon manuscrit, a bien voulu me donner de précieux conseils pour le classement des Mémoires et des Notes, et qu'il a aussi lu et approuvé la dernière épreuve d'imprimerie de cet Opuscule.

Je demande la permission de résumer quelques-uns des passages de la Notice que j'ai placée en tête de cet Opuscule.

Ayant soutenu brillamment en Sorbonne, le 16 juin 1877, sa thèse de Docteur ès sciences mathématiques, ayant été admis premier au Concours d'agrégation des Sciences mathématiques, le 18 septembre 1877, M. Emile Picard se trouvait, à l'âge de 21 ans seulement, en possession des deux diplômes qui, obtenus dans de si honorables conditions, permettent d'aspirer aux plus hautes situations universitaires.

Du 29 janvier 1877 au 23 septembre 1889, M. E. Picard avait publié 117 Notes et Mémoires d'Analyse pure et appliquée. A partir de l'année 1881, l'Académie des Sciences l'avait plusieurs fois regardé comme digne d'entrer dans son sein ; en 1886, elle lui avait accordé le Prix Poncelet pour l'ensemble de ses travaux mathématiques ; en 1888, elle lui avait décerné, d'après les conclusions d'un très élogieux Rapport de M. *Henri Poincaré*, le Grand Prix des Sciences mathématiques pour son célèbre Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques. Aussi parût-il tout naturel qu'elle lui accordât, le 11 novembre 1889, un fauteuil dans la Section de Géométrie. C'est grâce à des travaux scientifiques du premier ordre que M. E. Picard obtint cette distinction à un âge (33 ans) où bien des chercheurs commencent seulement à se faire connaître et apprécier. Ce succès ne ralentit pas son ardeur.

Plusieurs des questions dont M. E. Picard s'est occupé sont désignées par son nom. Au début de la théorie des fonctions entières, se trouvent deux principes que plusieurs géomètres ont appelés *Théorèmes de Picard*. Le groupe de transformations de points dans l'espace situé d'un même côté d'un plan a été nommé *Groupe de Picard* par MM. R. Fricke et Félix Klein. Une classe de surfaces hyperelliptiques a été désignée par M. *Henri Poincaré* sous la dénomination de *Surfaces de Picard*. Beaucoup de mathématiciens ont appliqué le nom d'*Intégrales de Picard* aux intégrales de différentielles

totales de seconde espèce et de troisième qui jouent un rôle si important dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.

Rappelons que c'est au prix de grandes fatigues de l'esprit que M. E. PICARD est parvenu à établir par l'analyse, en 22 années, cette théorie dont plusieurs points sont à présent abordés géométriquement par d'illustres géomètres italiens.

Ne se bornant pas à la tâche si difficile d'étendre le domaine des Mathématiques, M. E. PICARD a présenté avec une haute compétence l'histoire philosophique des conquêtes de l'esprit humain pendant la seconde moitié du XIXe siècle, dans des Conférences en Amérique et dans son Rapport intitulé *Sciences*, écrit, sur la demande du Gouvernement Français, pour faire partie de l'Introduction générale aux rapports du Jury international de l'Exposition universelle de 1900, à Paris.

Tours, imprimerie Deslis Frères, 6, rue Gambetta.

EXTRAITS DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES

Séance du 23 *juillet* 1910.

Présidence de M. Matignon.

M. Lebon présente son Ouvrage intitulé : *Savants du jour :* Emile Picard.

Séance du 23 *octobre* 1910.

Présidence de M. Matignon.

M. le Président annonce que la souscription pour la médaille de la Société est ouverte.

Séance du 12 *novembre* 1910.

Présidence de M. Matignon.

M. Berthelot fait une conférence sur les *Effets chimiques des rayons ultra-violets.*

M. Leau lit son *Rapport sur l'œuvre de la délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale.*

Séance du 26 *novembre* 1910.

Présidence de M. Matignon.

M. le Président signale l'ouvrage de M. Lebon, intitulé : *Savants du jour :* Paul Appell.

M. Victor Henri fait une conférence sur les *Actions biologiques des rayons ultra-violets.*

M. Nicolardot expose des *Experiences relatives aux alliages des métaux rares et les applications de ces alliages.* Il décrit le *briquet à l'alliage Auer.*

Séance du 24 décembre 1910.

Présidence de M. Matignon.

M. P. Lemoine fait une communication sur les *Irrégularités du niveau de l'eau dans la nappe aquifère du lutécien à Paris.*

M. Lebon résume un Mémoire où il expose le *calcul avec une équation indéterminée des caractéristiques entrant dans une Table de facteurs premiers des grands nombres.*

Seance du 14 janvier 1911.

1re partie : Présidence de M. Matignon.

M. Servant est élu Vice-Président de la Société pour l'année 1911.

M. Lebon est élu Secrétaire des séances pour les années 1911 et 1912.

M. Fauret-Frémiet est élu Vice-Secrétaire des Séances pour les années 1911 et 1912.

M. Rabaud est élu Trésorier de la Société pour l'année 1911.

M. Coutière reste Secrétaire du *Bulletin.*

2e partie : Présidence de M. Hua.

M. Michel fait une commmunication sur l'autotomie et la régénération du *corps et des élytres et sur la structure des élytres chez les Annélides Polynoïdiens.*

M. Deschamps fait une communication sur *la Thermométrie.*

Séance du 28 janvier 1911.

Présidence de M. Hua.

M. Matignon fait une communication sur l'*Azote contenu dans la houille et sa récupération à l'état d'ammoniaque.*

Séance du 11 février.

Présidence de M. Hua, président.

Une commission composée de MM. Coutière, Launoy, Guieysse, rapporteur, est chargée d'examiner les titres des candidats à la place vacante dans la troisième section.

M. J. Deschamps expose un perfectionnement à une méthode de construction de table de nombres premiers.

M. Fauret-Frémiet fait une communication sur les mitochondries des Foraminifères.

DÉFINITION ET MESURE DES TEMPÉRATURES PAR LES INTENSITÉS CALORIFIQUES ;

Par M. le Dr Joseph DESCHAMPS.

I

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

La question de la mesure des températures est, comme toute question de mesure, très délicate, tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique. En laissant de côté ce dernier point de vue pour concentrer toute notre attention sur le terrain des principes, nous rappellerons que toute mesure de grandeur doit être précédée de la définition de la grandeur à mesurer en tant que *grandeur mathématique*, c'est-à-dire en tant que grandeur susceptible d'être *égalée* et *ajoutée* à une autre grandeur de même espèce. C'est à cette double condition seulement que l'opération de la mesure devient possible, et toute tentative faite en dehors de cette règle inéluctable reste illusoire et sans portée.

Cette même règle doit donc être appliquée avec soin et avec rigueur, dans le cas des températures, et cela est d'autant plus indispensable que le thermomètre est devenu un instrument aussi nécessaire et aussi fréquemment employé que l'unité de mesure de longueur.

Aussi avons-nous trouvé, à notre plus profond étonnement, un avis tout contraire, exprimé par un physicien distingué dans un traité devenu classique :

« Beaucoup de savants, dit-il, réservent le nom de grandeurs mesurables aux grandeurs dont on peut définir l'égalité et l'addition. D'après cette définition, on n'a pas idée d'une température qui serait double ou triple d'une autre ; on ne pourrait donc mesurer les températures, on pourrait seulement les repérer. Mais en physique, il y a bien peu de grandeurs mesurables au sens propre du mot ; souvent, d'ailleurs, il suffit de particulariser la définition d'une grandeur au lieu de lui laisser toute généralité pour en faire une grandeur susceptible d'addition. C'est ce qui pourrait être fait pour la température. Aussi la distinction entre les grandeurs mesurables

et les grandeurs non mesurables est-elle un peu subtile; c'est pourquoi, conformément à l'usage, nous continuerons à employer l'expression *mesurer une température* (1). »

Il est impossible de souscrire aux idées émises dans la précédente note. D'abord il n'y a aucune transaction à admettre sur la distinction entre les grandeurs non mesurables et les grandeurs mesurables et sur la nature de ces dernières. *Tous* les théoriciens sont d'accord sur la définition des grandeurs mesurables qui sont celles dont on peut définir l'égalité et l'addition et qui sont par suite les seules à la considération et à l'étude desquelles on puisse appliquer les théories mathématiques basées elles-mêmes sur la double idée d'égalité et d'addition. La distinction entre les grandeurs mesurables et les grandeurs non mesurables est donc loin d'être subtile, ainsi que le prétend cet auteur; et de plus toute grandeur non mesurable, ou même simplement non mesurée, est tout au plus susceptible d'appréciation. C'est pourquoi, malgré l'usage trop fréquemment adopté et contrairement à la conclusion de la citation qui vient d'être faite, nous dirons qu'il n'est pas possible actuellement de mesurer les températures, précisément parce que nous n'avons pas l'idée d'une température double ou triple d'une autre, et que par conséquent les températures ne sont pas des grandeurs mesurables. La seule chose permise dans les circonstances présentes, c'est l'appréciation ou le simple repérage des températures, conformément à l'avis d'autres physiciens nombreux et non moins distingués, à la condition toutefois de définir la température d'un corps en disant qu'elle représente l'*état* dans lequel se trouve ce corps par suite de son échauffement.

Il ne faut pas cependant perdre de vue que, par suite de l'arbitraire que comporte toujours une définition de mot, le terme de température peut être employé dans une acception différente, laquelle est susceptible d'entraîner une opération de mesure. C'est ainsi que, si nous convenons, avec Verdet, d'appeler « température d'un système, soit l'expression numérique du volume que possède le thermomètre faisant partie de ce système; soit une fonction quelconque, mais définie de cette expression, il est clair d'une part que, sous cette appellation, la température est susceptible d'être mesurée, et, d'autre part, que le mot *température* ainsi entendu n'a aucune signification mystérieuse que les progrès ultérieurs de la science puissent éclaircir

(1) H. Pellat, *Leçons de Thermodynamique*, introduction, note page 9 (Paris, Gauthier-Villars).

et qu'on doive aujourd'hui se contenter de sentir d'une façon plus ou moins vague (1). »

Malheureusement il est pour ainsi dire impossible de se confiner dans la définition stricte qui vient d'être donnée. D'abord l'instrument de mesure des températures, qui n'est autre jusqu'à présent qu'un instrument de mesure de volume, porte et conserve le nom de *thermomètre*, en sorte que, par la force même du mot, l'esprit se trouve entraîné en dehors des limites qu'il s'était fixées et qu'il a une tendance presque invincible à reporter la mesure des volumes ou des variations de volume jusqu'à la cause même de ces variations, c'est-à-dire à la chaleur. De plus, quelques précautions qu'on prenne, il est impossible d'écarter cette idée dominante de chaleur dans toutes les circonstances où l'on a à faire usage du thermomètre. Cela serait peut-être possible si le thermomètre était un simple instrument d'indication comme il l'est dans ses emplois industriels. Mais, dans l'étude théorique des phénomènes calorifiques, on ne peut vraiment pas faire abstraction de leur cause efficiente, si cachée qu'elle le soit.

Or, malgré le mystère qui enveloppe encore la nature de la chaleur, celle-ci apparaît avec tous les caractères d'une véritable grandeur. Elle est susceptible d'être égalée, cela ne fait aucun doute pour personne, mais elle est aussi susceptible d'addition. Lorsqu'un corps s'échauffe ou, si l'on veut, lorsque sa température s'élève, c'est qu'une nouvelle quantité de chaleur vient s'ajouter à celle qu'il possède déjà, en sorte que l'élévation de température est corrélative de l'augmentation de chaleur. Voilà pourquoi notre esprit ne s'arrête pas à l'effet, mais remonte à la cause qu'il voudrait atteindre et mesurer. Mais la difficulté reste alors entière, car cette cause n'est pas directement saisissable dans sa véritable nature; seuls ses effets sont observables, ainsi que cela arrive pour beaucoup d'autres causes et dans d'autres circonstances, et c'est peut-être pourquoi l'auteur de la note citée plus haut dit qu'il y a en physique bien peu de grandeurs mesurables au sens propre du mot. Il aurait plutôt raison de dire qu'il y a peu de grandeurs directement saisissables, ce qui entraîne évidemment une difficulté, sinon une impossibilité de mesure, d'autant plus que les grandeurs directement saisissables sont souvent difficilement mesurables, leurs mesures ne pouvant être obtenues que par des procédés plus ou moins détournés, ainsi qu'on le constate par de nombreux exemples en géométrie.

(1) Verdet, *Cours de Physique de l'École Polytechnique*, t. I, p. 3 (Paris, Imprimerie nationale).

Cependant difficulté ne veut pas dire impossibilité, et, bien que jusqu'à présent on n'ait pas réussi à mesurer la chaleur au sens propre du mot, ce n'est pas, pensons-nous, une raison pour croire celle-ci hors de notre atteinte. Rappelons-nous d'ailleurs que, dans un autre ordre d'idées, en mécanique pure, on retrouve un élément grandeur, savoir la Force, qui, malgré les apparences contraires, n'est pas lui non plus directement saisissable et ne se manifeste que par ses effets, dont le principal et le plus manifeste est le mouvement. Et cependant la Force a pu être mesurée moyennant, il est vrai, un luxe de précautions, d'hypothèses et peut-être d'artifices ; mais enfin la chose a été faite en dépit des difficultés qu'elle pouvait présenter.

Il n'est donc ni déraisonnable ni inutile de chercher à mesurer en elle-même la chaleur, cause de phénomènes calorifiques dont plusieurs sont directement observables et mesurables. Sans doute la mesure des températures, telle qu'elle est actuellement réalisée, permet d'établir des relations de dépendance entre les phénomènes observés et les variations de volume du thermomètre ; mais il serait certainement plus intéressant et aussi plus utile de connaître la relation directe entre les grandeurs des phénomènes et celle de leur cause véritable. Les procédés employés actuellement rentrent dans la catégorie des méthodes désignées en mathématiques pures sous le nom de changements de variables, lesquels sont non seulement légitimes, mais très souvent commodes et utiles en ce qu'ils permettent la substitution à la variable naturelle d'une variable nouvelle présentant des avantages particuliers. Toutefois ces procédés ne dispensent pas du retour à la variable fondamentale ; au contraire, ils le supposent et même l'exigent.

Ainsi doit-il en être en ce qui concerne l'étude des phénomènes thermiques. Il est d'ailleurs tout un ensemble de cas où ce retour à la variable naturelle s'impose : c'est lorsqu'il s'agit de la mesure des quantités de chaleur et de leurs relations avec les variations et les déplacements de la cause fondamentale de leur production ou de leur disparition. Les effets produits sont ici de même nature que la cause et ne peuvent être comparés qu'à elle ; aussi leur comparaison avec une chose si dissemblable, savoir le volume de la substance thermométrique, produit une impression pénible qui résulte de l'association de choses disparates, impressions qu'il est désirable au suprême degré de pouvoir dissiper. Et non seulement l'impression est pénible ; mais encore, par le fait de cette association contre nature, la calorimétrie et la thermodynamique tout entière restent dans une véritable détresse, et cela malgré l'introduction factice de

la notion de température absolue, qui indique une tentative dans la voie que nous indiquons, tentative logique et nécessaire mais encore infructueuse, car, en dépit de leur nom pompeux, les températures absolues ou encore thermodynamiques représentent, à un facteur constant près, les divers volumes du thermomètre.

Dans l'état actuel des choses, le but du présent travail est de chercher à combler cette lacune de la thermométrie et de proposer une méthode permettant d'atteindre et de mesurer la chaleur en tant que cause des phénomènes thermiques.

II

DÉFINITION DE LA TEMPÉRATURE PAR L'INTENSITÉ CALORIFIQUE.

Les considérations qui vont suivre s'appliquent exclusivement aux gaz qui constituent les substances thermométriques ; cette application est d'ailleurs restreinte aux limites dans lesquelles ils peuvent être considérés non seulement comme gaz, mais encore comme gaz parfaits. Par la première condition, leur volume ne peut descendre au-dessous de celui qu'ils peuvent occuper lorsque, étant pris en masse finie et déterminée, ils arrivent par suite du refroidissement à leur température critique. Par suite de la deuxième condition, nous nous interdisons même de les considérer dans un voisinage trop rapproché de cette température critique, où ils cessent de présenter les propriétés des gaz parfaits. En d'autres termes, nous n'avons en vue que les gaz parfaits, c'est-à-dire ceux qui obéissent à peu près rigoureusement aux deux lois de Mariotte et de Gay-Lussac, et parmi eux, plus spécialement l'hydrogène, dont la molécule est diatomique.

Cela étant, considérons une certaine masse d'hydrogène, prenons-la dans un état où elle occupe un certain volume v et où elle est soumise à une pression p. Elle se trouve en même temps dans un certain état calorifique, que nous appellerons la température et qui dépend de la quantité de chaleur qu'elle contient. En raison de l'homogénéité de la masse, cet état calorifique est complètement défini par la quantité de chaleur contenue dans l'unité de volume de ce gaz.

D'après cela, nous appellerons *intensité calorifique, à un instant donné, la quantité de chaleur contenue dans l'unité de volume du gaz considéré à cet instant.*

Cette intensité définit la température du gaz à l'instant considéré.

III

PROPRIÉTÉS DE L'INTENSITÉ CALORIFIQUE.

Nous nous proposons de montrer que l'intensité calorifique ainsi définie possède les caractères d'une grandeur mesurable.

1° *L'intensité calorifique est susceptible d'addition.* — Considérons une masse gazeuse, de volume v, de pression p et portée à une température définie par une intensité calorifique que nous désignerons par I. Échauffons ce gaz en le maintenant au volume constant v, moyennant un accroissement convenable de pression. Quand l'opération sera terminée, le gaz aura reçu une certaine quantité de chaleur qui s'est répartie uniformément dans tout son volume ; il en résulte que chaque unité du même volume a reçu une certaine quantité de chaleur, que nous désignerons par i et qu'il est naturel de regarder comme s'ajoutant à la précédente. La nouvelle température du gaz est donc définie par une nouvelle intensité calorifique I′ plus grande que l'intensité I et dont la valeur est :

$$\mathrm{I}' = \mathrm{I} + i.$$

2° *Il est possible de trouver le rapport de deux intensités calorifiques.* — Considérons encore un gaz possédant un volume v, une pression p, une intensité calorifique I, et soumettons-le à une compression adiabatique qui amène son volume à n'être, par exemple, que la moitié du volume primitif. Comme dans cette compression adiabatique, le gaz est par hypothèse soustrait à l'action de toute source de chaleur, il n'a ni reçu ni perdu aucune quantité de chaleur.

La chaleur qu'il possédait primitivement et qui était uniformément répartie dans le volume v se trouve maintenant renfermée tout entière dans le volume $\frac{v}{2}$. Il en résulte nécessairement que chaque unité de volume contient une quantité de chaleur deux fois plus grande qu'avant la compression. Le gaz possède donc maintenant une intensité calorifique 2I, et cela explique l'élévation de température qui accompagne une compression adiabatique. Seulement, alors qu'il est tout à fait légitime de dire que l'intensité calorifique a doublé, il est impossible de dire la même chose de la température.

Plus généralement, si par l'effet de la compression adiabatique, le

volume de la masse gazeuse devient $\frac{v}{3}, \frac{v}{4}, \ldots, \frac{v}{m}$, on voit de la même manière que l'intensité calorifique prend les valeurs 3I, 4I, ..., mI.

De la même manière, si le gaz, au lieu d'être comprimé, est décomprimé adiabatiquement et si son volume devient successivement $2v$, $3v$, $4v$, ..., mv, l'intensité calorifique passe par les valeurs $\frac{v}{2}, \frac{v}{3}, \frac{v}{4}, \ldots, \frac{v}{m}$.

On conclut de tout cela l'énoncé suivant :

Quand on considère une même masse gazeuse avant et après une compression ou une décompression adiabatique, les intensités calorifiques correspondant à ces deux états sont en raison des volumes que possède le gaz au commencement et à la fin de l'opération.

Donc, en désignant par v le volume initial, par v' le volume final, par I la première et par I′ la seconde intensité calorifique, on a :

$$\frac{I'}{I} = \frac{v}{v'},$$

égalité qui définit le rapport des deux intensités calorifiques I et I′.

3° *Il est possible de réaliser deux intensités calorifiques égales;* en d'autres termes, *il est possible de définir l'égalité de deux intensités calorifiques.* — Nous ne voulons pas parler ici simplement des intensités calorifiques qui se trouvent dans chaque unité de volume d'une même masse gazeuse à l'état d'équilibre et qui sont manifestement égales. Nous ne voulons pas non plus nous arrêter aux intensités calorifiques de deux masses gazeuses séparées, mais supposées dans les mêmes conditions de volume, de pression et de température, cette dernière pouvant être constatée à l'aide d'un thermomètre quelconque ni des intensités calorifiques qui appartiennent à une même masse gazeuse avant et après une opération qui la ramène à son état initial. Dans ces deux cas, l'égalité apparaît encore d'elle-même.

Nous voulons nous occuper d'un cas plus complexe dans lequel une même masse gazeuse peut conserver la même température en changeant à la fois de volume et de pression. L'égalité d'intensité calorifique correspondant à ces deux états est en effet loin d'apparaître immédiatement, et cependant elle doit encore ici se réaliser pour que nous puissions toujours définir la température d'un gaz par son intensité calorifique, quels que soient son volume et sa tension.

Considérons donc une masse gazeuse de volume v, de pression p

et à une température à laquelle correspond une intensité calorifique I. Soumettons ce gaz à une dilatation isothermique qui lui donnera un volume $v' > v$, et une pression $p' < p$, tout en lui conservant la même température constatée à l'aide d'un même instrument. On sait que ce processus isothermique ne peut être réalisé que si le gaz est en communication avec une source calorifique qui, dans le cas présent, lui fournit de la chaleur. Il ne s'agit donc plus ici de la même quantité de chaleur différemment répartie comme dans la seconde proposition, ni de quantités différentes de chaleur réparties dans le même volume, comme dans la première. Il y a ici tout à la fois inégalité de chaleur et inégalité de répartition, à la suite desquelles l'intensité calorifique ne doit pas être modifiée.

Pour analyser ce qui se passe dans cette modification isothermique, partageons-la en phases pour chacune desquelles les variations de volume et de pression sont infiniment petites, et examinons la manière dont s'accomplit chacune d'elles.

Au lieu de faire une seule modification qui nous fera passer du volume v au volume $v + dv$ et de la pression p à la pression $p - dp$, en laissant la température constante, imaginons qu'on fasse d'abord subir au gaz une dilatation adiabatique qui l'amènera au volume $v + dv$, en abaissant sa température, c'est-à-dire en diminuant son intensité calorifique, et qui ne le conduira pas à la pression $p - dp$, mais une pression $p - dp_1 < p - dp$, puis que l'on échauffe le gaz au volume constant $v + dv$ jusqu'à rétablir la température primitive et à produire la pression finale $p - dp$. Dans cette seconde partie de l'opération, la source environnante fournit de la chaleur au gaz, et pendant cette distribution chaque unité du volume $v + dv$ prendra à la source une certaine quantité de chaleur en vertu de laquelle son intensité calorifique, qui avait passé de la valeur I à la valeur $I - dI$ pendant la première partie adiabatique de l'opération, remonte à une valeur plus grande. Nous *admettrons* (car rien ne le prouve rigoureusement) que, par suite de cet échauffement, chaque unité de volume récupère exactement la quantité de chaleur dI qu'elle avait perdue dans son refroidissement adiabatique. Par suite de cette hypothèse, qui paraît absolument légitime, lorsque la température est revenue à la valeur primitive, l'intensité calorifique a repris la valeur primitive I, en sorte que, dans ces conditions nouvelles, à la même température correspond encore la même intensité calorifique.

La même chose ayant lieu pour toutes les phases comprenant le processus isothermique considéré, nous sommes autorisés à dire que :

Quelles que soient les conditions de volume et de pression d'un gaz, toutes les fois qu'il se trouve à une même température constatée à l'aide du même instrument, il possède la même intensité calorifique.

Il résulte de tout cela :

1° *Que l'intensité calorifique possède tous les caractères des grandeurs mesurables ;*

2° *Que la valeur de l'intensité calorifique est caractéristique de la température.*

IV

UNITÉ DE MESURE DES INTENSITÉS CALORIFIQUES. — MESURE DES TEMPÉRATURES PAR LES INTENSITÉS CALORIFIQUES.

La mesure des intensités calorifiques se fait, comme celle de toute grandeur mesurable, en la comparant à l'une d'entre elles supposée déterminée et connue à laquelle on donne le nom d'unité.

Le choix de cette unité est, suivant l'usage, complètement arbitraire. Il est par conséquent possible de remplacer une unité par une autre, à la condition toutefois de faire connaître le rapport de la nouvelle unité à la première.

Pour fixer les idées, nous prendrons, au moins provisoirement, comme unité de mesure d'intensité calorifique *la quantité de chaleur contenue dans un centimètre cube d'hydrogène, lorsque celui-ci se trouve à la température de la glace fondante sous la pression de un mètre de mercure.*

Mesure de la température d'un système. — La température d'un système est définie par la température que prend le thermomètre à gaz, lorsque ce dernier, étant mis en communication calorifique avec le système, se trouve en équilibre de température avec lui.

Les principes exposés dans le paragraphe précédent conduisent à une méthode permettant de déterminer la température d'un système sans faire appel à aucun principe nouveau ni à aucune formule dont on pourrait soupçonner et contester l'exactitude.

Supposons en effet que le thermomètre employé contienne, à la température de la glace fondante, un volume v_0 d'hydrogène à la pression p_0, à laquelle correspond pour définition l'intensité calorifique I_0 prise pour unité. Soumettons cette masse d'hydrogène à une compression ou à une dilatation adiabatique, suivant que la température à évaluer est supérieure ou inférieure à celle de la

glace fondante, et supposons que cette compression ou dilatation soit telle que le thermomètre étant ensuite mis en communication calorifique avec le système, il se trouve immédiatement en équilibre thermique avec lui, ce que l'on reconnaîtra à la constance de la pression. Dans ces conditions, la température du système est égale à celle que le thermomètre a acquise par le fait de sa compression ou dilatation adiabatique. Dès lors, si le nouveau volume v est lié au volume v_0 par la relation :

$$\frac{v}{v_0} = \frac{m}{n},$$

l'intensité calorifique I correspondant à ce volume sera, d'après ce qui a été démontré, liée à l'intensité calorifique I_0 prise pour unité par la relation :

$$\frac{I}{I_0} = \frac{n}{m},$$

on aura ainsi la mesure de l'intensité calorifique cherchée.

Cette manière de procéder, toute rigoureuse qu'elle soit, est cependant de réalisation difficile ; elle suppose en effet que la modification adiabatique amène immédiatement le gaz du thermomètre à la température d'équilibre. Il faudrait donc que celle-ci fût déjà approximativement connue ; et, dans tous les cas, on ne pourrait arriver à la déterminer exactement que par une série de tâtonnements, c'est-à-dire d'expériences permettant de se rapprocher du résultat cherché et finalement de l'atteindre. C'est, en d'autres termes, la méthode des approximations successives appliquée à la pratique, ce qui n'est pas sans présenter de grands inconvénients, surtout dans le cas présent, où il s'agit souvent de saisir une température pour ainsi dire au vol.

Il importe donc, pour la commodité de la mesure, d'avoir des formules établissant des relations entre l'intensité calorifique et le volume ou la pression du gaz, suivant que l'on opère à pression constante ou à volume constant, suivant les procédés déjà employés.

V

ÉTABLISSEMENT DES FORMULES THERMOMÉTRIQUES.

Nous prendrons comme point de départ de nos recherches les propriétés thermodynamiques des gaz, dont la première est la loi de Mariotte.

1° Loi de Mariotte. — *A une température donnée, le produit de la pression d'une masse gazeuse par son volume est constant. — Il est en outre fonction de cette température.*

La température étant définie par l'intensité calorifique, la loi de Mariotte est examinée par la formule :

$$pv = \mathcal{F}(\mathrm{I}). \tag{1}$$

2° *Dilatation infiniment petite d'une masse gazeuse sous pression constante.* — Soient p et v, la pression et le volume d'une masse gazeuse soumise à une intensité calorifique I. Proposons-nous de calculer l'augmentation de volume dv correspondant à une augmentation infiniment petite d'une intensité $d\mathrm{I}$.

Cette augmentation, qui est évidemment proportionnelle au volume v, est en même temps fonction de l'intensité calorifique I et de la pression actuelle p. On a donc :

$$dv = v\alpha(p,\mathrm{I})\, d\mathrm{I}. \tag{2}$$

La fonction $\alpha\,(p, \mathrm{I})$ qui représente l'augmentation de l'intensité de volume à partir de la pression p et de l'intensité I pour une augmentation d'intensité égale à l'unité, s'appelle *le coefficient de dilatation du gaz* correspondant à cette pression et à cette intensité.

Remplaçons dans la formule (2) v et dv par leurs valeurs tirées de la formule (1), il vient :

$$\alpha\,(p,\mathrm{I}) = \frac{\mathcal{F}'\,(\mathrm{I})}{\mathcal{F}\,(\mathrm{I})}. \tag{3}$$

Ce résultat montre que *le coefficient de dilatation d'un gaz sous pression constante est indépendant de cette pression et qu'il est uniquement fonction de l'intensité calorifique.*

Nous poserons donc :

$$\alpha\,(p,\mathrm{I}) = f\,(\mathrm{I}),$$

en sorte que la formule (2) devient :

$$dv = vf(\mathrm{I})\,d\mathrm{I}. \tag{3}$$

3° *Variation finie du volume d'une masse gazeuse sous pression constante pour une variation finie d'intensité calorifique. — Formule thermométrique du volume sous pression constante.*

De la formule (3) on tire :

$$\frac{dv}{v} = f\,(\mathrm{I})\,d\mathrm{I}$$

d'où en intégrant entre les limites I_0 et I :

$$\log\frac{v}{v_0} = \int_{\mathrm{I}_0}^{\mathrm{I}} f\,(\mathrm{I})\,d\mathrm{I},$$

ou

$$\log\frac{v}{v_0} = \mathrm{F}\,(\mathrm{I}) - \mathrm{F}\,(\mathrm{I}_0). \tag{4}$$

On tire de là :

$$\frac{v}{v_0} = e^{\mathrm{F}\,(\mathrm{I}) - \mathrm{F}\,(\mathrm{I}_0)} = \frac{e^{\mathrm{F}\,(\mathrm{I})}}{e^{\mathrm{F}\,(\mathrm{I}_0)}},$$

d'où :

$$v = v_0\,\frac{e^{\mathrm{F}\,(\mathrm{I})}}{e^{\mathrm{F}\,(\mathrm{I}_0)}}. \tag{5}$$

C'est la formule thermométrique cherchée permettant de calculer le volume v d'une masse gazeuse soumise à l'intensité calorifique I, lorsqu'on connaît son volume v_0 sous l'intensité I_0.

On l'appelle *la formule des dilatations sous pression constante.*

Elle permet aussi, lorsqu'il en est besoin, de calculer la dilatation totale $v - v_0$, ou cette même dilatation rapportée à l'unité de volume, c'est-à-dire la quantité $\dfrac{v - v_0}{v_0}$.

4° *Formule thermométrique de la pression sous volume constant.* Considérons une masse gazeuse de volume v_0 et de pression p_0 sous l'intensité I_0. A l'intensité I et sous la même pression p_0, son volume v est donné par la formule (5).

Par une modification isothermique conservant l'intensité I, ramenons ce volume à v_0 par une pression p. Nous aurons alors en vertu de la formule (1) :

$$pv_0 = p_0 v.$$

Remplaçons v par sa valeur fournie par la formule (5), il vient :

$$p = p_0 \frac{e^{F(I)}}{e^{F(I_0)}}. \tag{6}$$

C'est la formule cherchée. On l'appelle *formule des dilatations sous volume constant*. On voit qu'elle est de même nature que celle des dilatations sous pression constante.

On en tire par différentiation :

$$dp = p_0 F'(I) \frac{e^{F(I)}}{e^{F(I_0)}} dI.$$

d'où en divisant par la formule (6) :

$$\frac{dp}{p} = F'(I)\, dI,$$

ou

$$dp = pf(I)\, dI. \tag{7}$$

Cette nouvelle formule permet de calculer l'augmentation infiniment petite de pression sous volume constant pour une augmentation infiniment petite d'intensité dI. La fonction $f(I)$ est le coefficient d'augmentation de pression sous volume constant ; par extension de langage, on l'appelle *le coefficient de dilatation sous volume constant*, et l'on voit qu'il est égal au coefficient de dilatation sous pression constante.

5° *Loi de Gay-Lussac. — Formule caractéristique des gaz.* — La loi de Gay-Lussac qui exprime que tous les gaz se dilatent de la même manière pour la même élévation de température se traduit par ce fait que la fonction $f(I)$ et par suite la fonction $F(I)$ sont indépendantes de la nature du gaz.

Cela étant, considérons une masse gazeuse ayant le volume v_0 et la pression p_0 sous une intensité calorifique I_0, et supposons que, pour une nouvelle intensité I, elle occupe un nouveau volume v sous la pression p. Nous cherchons la relation qui existe entre les quantités v, p, I, v_0, p_0, I_0.

Pour cela imaginons que l'intensité calorifique passe de I_0 à I, la pression restant p_0, le volume deviendra :

$$v' = v_0 \frac{e^{F(I)}}{e^{F(I_0)}}.$$

Supposons ensuite que l'intensité I restant constante, la pression passe de p_0 à p, le volume devenant v, on aura :

$$pv = p_0 v',$$

d'où en remplaçant v' par la valeur précédente :

$$pv = p_0 v_0 \frac{e^{F(I)}}{e^{F(I_0)}} \tag{8}$$

ou

$$\frac{pv}{e^{F(I)}} = \frac{p_0 v_0}{e^{F(I_0)}}. \tag{9}$$

On obtient ainsi, sous une forme ou sous l'autre, ce qu'on peut appeler l'équation caractéristique de l'état gazeux, qui résulte de la combinaison des deux lois de Mariotte et de Gay-Lussac et les comprend l'une et l'autre comme cas particuliers.

Pour abréger l'écriture, nous poserons

$$e^{F(I)} = \varphi(I),$$

et nous désignerons la fonction φ (I) sous le nom de *fonction thermométrique*. Les formules (5), (6) et (8) deviennent alors :

$$v = v_0 \frac{\varphi(I)}{\varphi(I)_0} \tag{5'}$$

$$p = p_0 \frac{\varphi(I)}{\varphi(I)_0} \tag{6'}$$

$$pv = p_0 v_0 \frac{\varphi(I)}{\varphi(I)_0}. \tag{8'}$$

6° *Relation entre la pression et le volume dans une modification adiabatique. — Formule de Laplace.* — La définition des températures par les intensités calorifiques ne change rien aux considérations dans lesquelles on doit entrer relativement aux quantités de chaleur nécessaires pour produire une transformation déterminée sur une masse gazeuse ni à la nature des calculs à effectuer dans ce but. C'est ainsi en particulier qu'on est amené à considérer et à distinguer la chaleur spécifique à volume constant et la chaleur spécifique à pression constante, dont nous allons rappeler les définitions en les adaptant à notre nouvelle manière d'envisager les températures.

Considérons l'unité de masse gazeuse et supposons qu'elle occupe le volume v sous la pression p et l'intensité calorifique I. Faisons passer cette intensité de I à I + dI sans changer le volume; il faudra pour cela fournir au gaz une certaine quantité de chaleur dq_1. Le quotient

$$\frac{dq_1}{d\mathrm{I}} = c \tag{10}$$

est par définition *la chaleur spécifique à volume constant.*

Supposons au contraire que l'on fasse passer l'intensité calorifique de I à I + dI, mais sans changer la pression. Il faudra pour cela fournir au gaz une autre quantité de chaleur dq_2. Le quotient

$$\frac{dq_2}{d\mathrm{I}} = \mathrm{C} \tag{11}$$

est par définition *la chaleur spécifique à pression constante.*

La théorie et l'expérience montrent que le coefficient C est plus grand que le coefficient c. De plus, Laplace et Reech ont établi des formules qui ont conduit à des expériences permettant de mesurer le rapport $\frac{\mathrm{C}}{c}$. Ces expériences, réalisées, d'abord par Clément et Desormes, puis récemment par Maneuvrier, ont fourni les valeurs de ce rapport $\frac{\mathrm{C}}{c}$ et cela sans qu'il ait été nécessaire de se servir d'un autre instrument de mesure que le manomètre; les résultats obtenus sont donc indépendants de toute échelle de mesure des températures. On a pu également, ainsi que l'ont montré Newton et Laplace, mesurer $\frac{\mathrm{C}}{c}$ par la vitesse du son; toutefois les formules dont on fait usage dans ce but contiennent la température, ce qui est une raison pour

nous de ne pas tenir compte de ce mode particulier de détermination.

Néanmoins toutes les expériences faites sont concordantes et donnent 1,412 comme valeur moyenne du rapport $\frac{C}{c}$ pour les gaz diatomiques suffisamment voisins de l'état parfait, tels que l'hydrogène, l'oxygène, l'azote et l'oxyde de carbone. Cette valeur est d'ailleurs indépendante de la température.

Cela étant, posons :

$$\frac{C}{c} = \gamma. \tag{12}$$

Par une suite de considérations que nous n'avons pas à développer ici et qu'on trouve exposées dans les traités de Thermodynamique, Laplace a montré que, dans les différentes phases d'une modification adiabatique imposée à un gaz, le volume v et la pression p, variables l'un et l'autre, sont liés par la relation :

$$pv^{\gamma} = \text{C}^{\text{te}}. \tag{13}$$

C'est la formule de Laplace que nous avons annoncée et dont nous aurons à faire usage.

VI

RECHERCHE DE LA FONCTION THERMOMÉTRIQUE.

Nous nous proposons de rechercher la forme de la fonction $\varphi(1)$ qui figure dans les formules (5′), (6′) et (8′). Pour cela, nous allons interpréter théoriquement, à l'aide de formules précédemment établies, le procédé pratique que nous avons indiqué plus haut.

Supposons donc le gaz thermométrique ayant le volume v_0 et la pression p_0 en même temps que l'intensité I_0. Soumettons-le à une compression (ou à une dilatation) adiabatique capable de l'amener à l'intensité calorifique I qu'il s'agit d'évaluer. Soient

$$v = \frac{m}{n} = v_0 \tag{14}$$

le volume alors acquis par la masse gazeuse et p la pression réalisant l'équilibre de température entre le thermomètre et la source. D'après ce qui a été démontré plus haut, on a :

$$I = \frac{n}{m} = I_0. \tag{15}$$

Appliquons à cet état du gaz la formule (8') caractéristique de l'état gazeux, nous aurons :

$$p \times \frac{m}{n} v_0 = p_0 v_0 \frac{\varphi(I)}{\varphi(I)_0}$$

d'où :

$$\frac{p}{p_0} = \frac{n}{m} \frac{\varphi(I)}{\varphi(I)_0}. \tag{16}$$

Appliquons d'autre part la formule (13) des modifications adiabatiques, il nous vient :

$$p \left(\frac{m}{n} v_0\right)^\gamma = p_0 v_0^\gamma,$$

d'où :

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{n}{m}\right)^\gamma. \tag{17}$$

La comparaison des formules (16) et (17) nous donne :

$$\frac{n}{m} \frac{\varphi(I)}{\varphi(I)_0} = \left(\frac{n}{m}\right)^\gamma,$$

d'où :

$$\frac{\varphi(I)}{\varphi(I)_0} = \left(\frac{n}{m}\right)^{\gamma - 1},$$

ou

$$\frac{\varphi(I)}{\varphi(I_0)} = \frac{\left(\frac{n}{m} I_0\right)^{\gamma - 1}}{I_0^{\gamma - 1}},$$

c'est-à-dire enfin :

$$\frac{\varphi(I)}{\varphi(I)^0} = \frac{I^{\gamma - 1}}{I_0^{\gamma - 1}}. \tag{18}$$

Les formules (5′), (6′) et (8′) deviennent ainsi :

$$v = v_0 \left(\frac{I}{I_0}\right)^{\gamma - 1}, \tag{19}$$

$$p = p_0 \left(\frac{I}{I_0}\right)^{\gamma - 1}, \tag{20}$$

$$pv = p_0 v_0 \left(\frac{I}{I_0}\right)^{\gamma - 1}. \tag{21}$$

Ce sont les formules cherchées.

Cette dernière peut s'écrire :

$$pv = \frac{p_0 v_0}{I_0^{\gamma - 1}} I^{\gamma - 1}$$

où

$$pv = RI^{\gamma - 1} \tag{22}$$

en posant

$$\frac{p_0 v_0}{I_0^{\gamma - 1}} = R.$$

On obtient ainsi la formule correspondant à la formule :

$$pv = RT$$

ordinairement employée.

VII

CALCUL DES CONSTANTES THERMOMÉTRIQUES.

La formule (19) est la formule thermométrique sous pression constante et la formule (20) la formule thermométrique sous volume constant. Ces formules sont absolument générales et peuvent être employées en prenant comme point de départ une température quelconque définie par une intensité calorifique I_0. Elles font connaître le rapport $\frac{I}{I_0}$ par l'un ou l'autre des rapports $\frac{v}{v_0}$ ou $\frac{p}{p_0}$.

Dans la pratique, on prend comme point de départ la température de la glace fondante, c'est-à-dire l'intensité calorifique sous un volume v_0 et une pression p_0 déterminés. Nous avons déjà dit à ce

sujet qu'on peut prendre pour unité d'intensité calorifique l'intensité calorifique de l'hydrogène sous la pression d'un mètre de mercure. Néanmoins, pour nous conformer à l'usage le plus fréquent, nous soumettrons cette unité de volume d'hydrogène à la pression atmosphérique moyenne mesurée par une colonne de mercure de 760 millimètres. Donc, à la condition d'opérer constamment sous la pression $p_0 = 700$ millimètres, on a :

$$v = v_0 \mathrm{I}^{\gamma - 1}.$$

De même, à la condition d'opérer sous le volume constant $v_0 = 1$ centimètre cube, on aura :

$$p = p_0 \mathrm{I}^{\gamma - 1};$$

d'où, dans le premier cas,

$$\mathrm{I} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}},$$

et dans le second :

$$\mathrm{I} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

Or, parmi les températures en nombre infini possible, il en est une que l'on considère plus spécialement : c'est la température de l'eau bouillante, pour laquelle le rapport $\frac{v}{v_0}$ a la valeur $\frac{373}{273}$. En désignant par I_{eb} l'intensité calorifique correspondant à cette température, on aura :

$$\mathrm{I}_{eb} = \left(\frac{373}{273}\right)^{\frac{1}{0{,}412}},$$

en tenant compte de la valeur $\gamma = 1{,}412$. Tous calculs effectués, on trouve :

$$\mathrm{I}_{eb} = 2{,}134. \tag{23}$$

On peut encore, pour se conformer à la méthode jusqu'à présent en usage dans la mesure des températures, prendre pour unité d'intensité calorifique le centième de la différence entre les intensités calorifiques correspondant aux températures de l'eau bouillante et de la glace fondante sous la pression de 760 millimètres de mercure, et compter les variations d'intensité calorifique à partir de l'intensité I_0. Dans ces conditions, en posant :

$$I_{eb} = I_{100},$$

on aura :

$$I_{100} - I_0 = 100 ;$$

de même en désignant par 1 une intensité calorifique mesurée à l'aide de cette unité, on écrira :

$$I - I_0 = i,$$

d'où :

$$I = I_0 + i. \tag{24}$$

La quantité i désigne alors les variations *positive ou négative* d'intensité comptée à partir de l'intensité I_0.

Les intensités calorifiques ainsi mesurées peuvent encore être désignées, si l'on veut, sous le nom d'*intensités centigrades*, et il ne reste plus qu'à exprimer I_0 et I_{100} en fonction de la nouvelle unité, ce qui se fait par la résolution des équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{I_{100}}{I_0} = 2{,}134 \\ I_{100} - I_0 = 100. \end{array} \right.$$

On trouve ainsi :

$$I_0 = 88{,}183 \tag{25}$$

$$I_{100} = 188{,}183 \tag{26}$$

Nouvelle forme de la relation thermométrique. — Ecrivons :

$$I = I_0 + i,$$

la formule (29) devient :

$$v = v_0 \left(1 + \frac{1}{I_0} i\right)^{\gamma - 1},$$

posons alors :

$$\frac{1}{I_0} = \alpha ;$$

il vient :

$$v = v_0 (1 + \alpha i)^{\gamma - 1}, \tag{27}$$

formule analogue, mais non identique à la formule :

$$v = v_0 (1 + \alpha t)$$

jusqu'à présent employée pour le calcul des températures. La quantité constante α représente alors, non plus ce qu'on appelle dans l'ancien système le coefficient de dilatation du gaz, c'est-à-dire l'augmentation de l'unité de volume pour une élévation de température d'un degré, mais le quotient :

$$\frac{v^{\frac{1}{\gamma-1}} - v_0^{\frac{1}{\gamma-1}}}{v_0^{\frac{1}{\gamma-1}} i},$$

lequel est constant et a pour valeur :

$$\alpha = \frac{1}{88{,}123} = 0{,}01134. \tag{28}$$

De toutes façons on retrouve la distinction entre les intensités relatives et les intensités absolues, comme dans l'ancien système, et le moyen de passer des unes aux autres. En effet, si l'on désigne par i une unité centigrade comptée à partir de I_0, on a :

$$I = I_0 + i = 88{,}123 + i.$$

Les intensités calorifiques absolues surpassent donc de 88,123 unités centigrades les intensités calorifiques comptées à partir de I_0. Le nombre 88,123 remplace le nombre 273 de l'ancien système; il est, comme on le voit, notablement plus petit. Le *zéro absolu* d'intensité calorifique, lequel est un vrai zéro absolu, est de 88,123 unités centigrades au-dessous de l'intensité calorifique correspondant à la température de fusion de la glace. Cette différence de grandeur entre les deux nombres 88,123 et 273 tient à ce que la nouvelle unité n'a

pas la même relation de grandeur que l'ancienne avec les variations de volume du gaz.

Passage d'un système de mesure à l'autre. — Ce passage s'effectue à l'aide de la formule :

$$\frac{I}{I_0} = \frac{I_0 + i}{I_0}$$

ou

$$\frac{I}{I_0} = 1 + \frac{i}{I_0},$$

dans laquelle $\frac{I}{I_0}$ représente la mesure de l'intensité en prenant I_0 pour unité, tandis que i réprésente l'intensité centigrade comptée à partir de I_0. En remplaçant donc dans le premier nombre I_0 par 1 et dans le second par 88,123, il vient :

$$I = 1 + \frac{i}{88,123}. \tag{29}$$

Cette formule, qui fournit I en fonction de i, permet, inversement, de calculer i en fonction de I.

Rapport entre les deux unités de mesure. — Dans le premier système, la quantité I_0 est représentée par 1, tandis que, dans le second, elle l'est par le nombre 88,123. Le rapport de la première unité à la seconde est donc représenté par le nombre :

$$88,123,$$

tandis que le rapport de la seconde unité à la première est :

$$\frac{1}{88,123} = 0,01134.$$

Relation entre les intensités calorifiques et les températures proprement dites. — On peut toujours supposer les températures ordinaires exprimées en températures absolues; il suffit pour cela d'ajouter à chaque température centigrade le nombre 273. Dans ces conditions, on sait que le volume v du gaz du thermomètre est exprimé par la formule :

$$v = v_0 \alpha T \tag{30}$$

dans laquelle α désigne le coefficient de dilatation commun $\frac{1}{273}$ du gaz. D'autre part, en faisant $I_0 = 1$, le même volume est exprimé en fonction de l'intensité calorifique par la nouvelle formule :

$$v = v_0 I^{\gamma - 1}. \tag{31}$$

La comparaison des formules (30) et (31) donne :

$$\alpha T = I^{\gamma - 1}. \tag{32}$$

Telle est la formule cherchée qui exprime la température absolue ordinaire en fonction de l'intensité calorifique. Elle comble la lacune signalée plus haut concernant l'absence d'une relation définie entre les températures telles qu'elles étaient jusqu'à présent définies et mesurées et les intensités de chaleur reconnues cependant comme causes dernières des phénomènes calorifiques.

Nous remarquerons que l'équation (32) peut s'écrire :

$$(\alpha T)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = I. \tag{32'}$$

Sous cette forme et en considérant I comme abscisse et T comme ordonnée, elle définit une parabole de degré $\frac{1}{\gamma - 1}$, qui ne diffère pas beaucoup d'une parabole du second degré, puisque, à cause de $\gamma = 1{,}412$, l'exposant $\frac{1}{\gamma - 1} = \frac{1}{0{,}412}$ diffère peu du nombre 2.

Nous sommes, d'après tout cela, en droit de dire que le problème de la thermométrie est désormais complètement résolu, sous la condition expresse que le rapport $\frac{C}{c} = \gamma$ des deux chaleurs spécifiques des gaz est indépendant de la température et de la pression.

Nous trouvons d'ailleurs une justification de nos raisonnements et des résultats qu'ils nous ont fournis, si nous calculons par notre méthode les quantités de chaleur qu'il faut fournir à une masse gazeuse pour la porter de l'intensité I à l'intensité $I + dI$, d'une part, sous pression constante, d'autre part sous volume constant. Le rapport de ces quantités de chaleur doit être évidemment égal au rapport γ des deux chaleurs spécifiques.

Cherchons d'abord la quantité de chaleur dq qu'il faut lui fournir

pour l'échauffer sous le volume constant v. L'intensité calorifique passant de I à I + dI, la quantité de chaleur à fournir à chaque unité de volume est égale à dI, et par conséquent la quantité totale de chaleur à fournir est :

$$dq = v dI. \tag{33}$$

Pour trouver ensuite la quantité de chaleur dQ qu'il faut fournir pour échauffer le gaz sous pression constante, c'est-à-dire pour le porter sous pression invariable au volume $v + dv$ et à l'intensité I + dI, nous réaliserons cette transformation par la succession des opérations suivantes :

1° Nous ferons une dilatation adiabatique faisant passer le volume de v à $v + dv$; ce qui abaisse l'intensité calorifique d'une certaine quantité dI;

2° Nous produirons un premier échauffement sous volume constant, pour ramener l'intensité calorifique à sa valeur primitive I;

3° Nous produirons un deuxième échauffement sous volume constant, de façon à passer de l'intensité I à l'intensité définitive I + dI.

La première opération n'exige aucun rapport ni aucune dépense de chaleur; mais elle produit un abaissement dI' de l'intensité calorifique, abaissement qu'il est facile de calculer. En effet le rapport des deux intensités calorifiques I et I — dI' avant et après la dilatation est en raison inverse des volumes v et $v - dv$. On a donc :

$$\frac{I - dI'}{I} = \frac{v}{v + dv}$$

On tire de là :

$$dI' = \frac{I dv}{v + dv}$$

Il suit de là que, dans la deuxième opération qui rétablira l'intensité I, sans changer le volume $v + dv$, on devra fournir une quantité de chaleur dq_1 égale à $(v + dv)\, dI'$, d'où, en tenant compte de la valeur précédente de dI' :

$$dq_1 = I dv. \tag{34}$$

Enfin, dans la troisième opération qui amène l'intensité à I + dI, en maintenant toujours le volume $v + dv$, on devra fournir une

quantité de chaleur dq_2, qui est, d'après la formule (33), appliquée au volume $v + dv$,

$$dq_2 = (v + dv)\,dI,$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

(35) $$dq_2 = v\,dI.$$

On a donc, pour la quantité totale dQ de chaleur fournie dans cette suite d'opérations :

$$dQ = dq_1 + dq_2,$$

c'est-à-dire, en tenant compte des formules (34) et (35) :

$$dQ = I\,dv + v\,dI$$

ou

(36) $$dQ = d(Iv).$$

Cela étant de la formule établie :

$$v = v_0 \frac{I^\gamma - 1}{I_0^\gamma - 1},$$

on tire

$$Iv = \frac{v_0}{I_0^\gamma - 1} I^\gamma,$$

d'où :

$$d(Iv) = \gamma v_0 \frac{I^\gamma - 1}{I_0^\gamma - 1}$$

ou

$$d(Iv) = \gamma v\,dI,$$

et par suite :

(37) $$dQ = \gamma v\,dI.$$

Des formules (33) et (36) on tire :

$$\frac{dQ}{dq} = \gamma = \frac{C}{c},$$

ce qu'il fallait trouver.

Mais nous ne voulons pas terminer sans faire remarquer tout l'intérêt qui s'attache à la formule (36) :

$$dQ = d(Iv). \tag{36}$$

La quantité Iv représente, d'après notre manière de voir, la quantité de chaleur contenue dans la masse gazeuse considérée, à l'état où elle se trouve d'après les conditions qui déterminent cet état. Or nous savons que l'état d'une masse gazeuse, lequel dépend de deux variables indépendantes, peut être défini en particulier par son volume v et sa température, c'est-à-dire par son intensité calorifique I. Le produit Iv de ces deux variables définit donc cet état de la façon la plus complète, et nous venons de rappeler sa signification. Il est légitime, en dehors de toute interprétation possible, de lui donner un nom particulier, et nous l'appellerons *la puissance calorifique* de la masse gazeuse considérée.

Toute modification imposée, à partir de cet état, à la masse gazeuse entraîne une variation de sa puissance calorifique, et la formule (36) montre que cette variation est égale à la quantité de chaleur dQ mise en jeu dans cette transformation. Or, parmi toutes les transformations possibles, les plus simples et les plus fréquemment réalisées sont celles qui correspondent à des variations arbitraires de l'une ou de l'autre des variables indépendantes ou de toutes les deux. D'après cela, nous avons à considérer plus spécialement :

1° Les transformations dans lesquelles I seule varie, et qui correspondent par conséquent à un échauffement ou à un refroidissement sous volume constant;

2° Les transformations dans lesquelles v seul varie, et qui ont reçu le nom de modifications isothermiques;

3° Les transformations dans lesquelles I et v varient tous les deux. Ces transformations, qui n'ont pas reçu de nom particulier, sauf dans le cas où il n'y a pas d'échange de chaleur entre le gaz et le milieu ambiant et où la modification est dite adiabatique, peuvent être regardées, lorsqu'elles sont infiniment petites, comme produites par la coexistence ou la succession des deux premières supposées également infiniment petites.

Quelle que soit la transformation produite, la quantité de chaleur reçue ou dégagée par le gaz est exprimée par la formule (36). Donc, en particulier :

1° Si le volume est constant, on a :

$$dq_2 = v d\mathrm{I};$$

2° Si la température est constante, on a :

$$dq_1 = \mathrm{I} dv;$$

3° Enfin, si la température et le volume varient, on a :

$$d\mathrm{Q} = v d\mathrm{I} + \mathrm{I} dv.$$

Mais alors, si le gaz est soustrait à tout échange de chaleur, c'est-à-dire si $d\mathrm{Q} = 0$, la formule (31) entraîne :

$$d(\mathrm{I}v) = 0$$

et par suite :

$$\mathrm{I}v = \mathrm{C^{te}}. \tag{38}$$

Donc, *pendant toute la durée d'une modification adiabatique la puissance calorifique du gaz reste constante.* Cette proposition résultait d'ailleurs immédiatement de ce que nous avons dit plus haut sur le rapport des intensités calorifiques. Nous avons, en effet, explicitement admis que, dans deux phases différentes quelconques d'une même modification adiabatique, on a :

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0} = \frac{v_0}{v},$$

d'où :

$$\mathrm{I}v = \mathrm{I}_0 v_0 = \mathrm{C^{te}}.$$

Nous compléterons cette étude purement thermométrique en en faisant l'application à la calorimétrie et à la thermodynamique et en particulier à la thermodynamique des gaz.

SUR LE CALCUL AVEC UNE ÉQUATION INDÉTERMINÉE DES CARACTÉRISTIQUES ENTRANT DANS UNE TABLE DE FACTEURS PREMIERS DES GRANDS NOMBRES;

Par Ernest LEBON.

1. Soient N, D et M des nombres appartenant à un système de progressions arithmétiques de base B.

Lorsque N admet un diviseur D, on a l'égalité :

$$DM = BK + I;$$

d'où l'on déduit que :

Si l'on divise par D *le produit* BK *et le reste* I, *la somme des restes obtenus égale* D.

ρ désignant la valeur absolue du reste négatif obtenu en divisant BK par D, R désignant le reste positif obtenu en divisant I par D,

Il y a égalité entre ρ *et* R.

Pour abréger, je dirai reste ρ et reste R.

2. Dans un précédent Mémoire (2), j'ai expliqué comment on pouvait calculer rapidement les restes ρ. J'ai déjà calculé et fait calculer un grand nombre de ces restes; lorsque ce calcul sera terminé, et refait comme vérification, il sera possible de se servir de la Table des restes ρ. (Voir *Addition*, fin du présent Mémoire.)

Pour construire la Table qui donne les facteurs premiers d'un nombre aussi grand que l'on veut (3), la Table des restes ρ est nécessaire. N'ayant qu'une partie de cette Table, j'ai souvent trouvé la valeur d'une caractéristique k qui correspond à un reste donné ρ, égal au reste R, en cherchant le couple convenable de valeurs entières et positives de k et de x, qui satisfont à l'équation indéterminée:

$$\rho_k = \rho_1 k - Dx,$$

D, ρ et ρ_k étant des nombres positifs, D étant supérieur à ρ_1, à ρ_k et à k.

J'ai d'abord calculé la valeur de k quand $\rho_k = 1$, en appliquant la

(1) Mémoire exposé dans la *Séance du* 24 décembre 1910.

(2) *Bulletin de la Société Philomathique de Paris*, s. IX, t. IX, 1908.

(3) *Bulletin de la Société Philomathique de Paris*, s. IX, t. IX, 1908 : A. F. A. S., *Compte rendu du Congrès de Clermont-Ferrand*, 1908.

méthode fondée sur l'emploi des restes obtenus en cherchant le p. g. c. d. entre D et ρ_1. De cette valeur on déduit très rapidement la valeur de k quand ρ_k égale un nombre donné.

Je suis arrivé, quand $\rho_k = 1$, à trouver une formule donnant k en fonction des quotients.

Notons que cette formule, avec des signes convenables, peut être appliquée à tous les cas qui se présentent dans la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée à deux inconnues :

$$ax + by = 1.$$

3. Soit l'équation indéterminée à deux inconnues k et x :

$$(E) \qquad 1 = \rho_1 k - Dx.$$

L'opération de la recherche du p. g. c. d. entre D et ρ_1 est :

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
D	ρ_1	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8
r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	

On a successivement :

$$(E_1) \qquad 1 = \rho_1 y_1 - r_1 x,$$
$$(E_2) \qquad 1 = r_1 y_2 + r_2 y_1,$$
$$(E_3) \qquad 1 = r_2 y_3 + r_3 y_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(E_{2n-1}) \qquad 1 = r_{2n-2}\, y_{2n-1} + r_{2n-1}\, y_{2n-2},$$
$$(E_{2n}) \qquad 1 = r_{2n-1}\, y_{2n} + r_{2n}\, y_{2n-1},$$

après avoir successivement posé :

$$(1) \qquad y_1 = k - q_1 x,$$
$$(2) \qquad y_2 = q_2 y_1 - x,$$
$$(3) \qquad y_3 = q_3 y_2 + y_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(2n-1) \qquad y_{2n-1} = q_{2n-1}\, y_{2n-2} + y_{2n-3},$$
$$(2n) \qquad y_{2n} = q_{2n}\, y_{2n-1} + y_{2n-2}.$$

4. Lorsque $r_{2n-1} = 1$, on a l'équation indéterminée :

$$(E_{2n-1})' \qquad 1 = r_{2n-2}\, y_{2n-1} + y_{2n-2},$$

où les inconnues sont y_{2n-1} et y_{2n-2}.

Lorsque $r_{2n} = 1$, on a l'équation indéterminée :

$$(E_{2n})' \qquad 1 = r_{2n-1}\, y_{2n} + y_{2n-1},$$

où les inconnues sont y_{2n} et y_{2n-1}.

On trouve aisément les couples de solutions entières qui satisfont soit à l'équation $(E_{2n-1})'$, soit à l'équation $(E_{2n})'$.

Quand on opère avec des nombres, de tout couple de solutions entières telles que y_{2n} et y_{2n-1}, on déduit successivement les valeurs entières correspondantes de y_{2n-2}, y_{2n-3}, ..., y_2, y_1, x, k, au moyen des équations $(2n)$, $(2n-1)$, ..., (3), (2), (1).

5. Au moyen du système d'équation (1), (2), ..., $(2n)$, j'ai tiré k d'abord en fonction de q_1, x et y_1 ; puis en fonctions de q_1, q_2, y_1 et y_2 ; ensuite en fonction de q_1, q_2, q_3, y_2 et y_3, etc. Je suis ainsi arrivé aux deux équations suivantes :

$$(2n-1)'' \qquad k = A_{2n-2}\, y_{2n-1} - B_{2n-1}\, y_{2n-2},$$
$$(2n)'' \qquad k = A'_{2n}\, y_{2n-1} - B'_{2n-1}\, y_{2n}.$$

Or, un couple de solutions données par l'équation $(E_{2n-1})'$ est :

$$y_{2n-1} = 0, \quad y_{2n-2} = 1 ;$$

et un couple de solutions données par l'équation $(E_{2n})'$ est :

$$y_{2n} = 0, \quad y_{2n-1} = 1.$$

Par suite, il suffit de faire les calculs avec un seul des coefficients des équations $(2n-1)''$ et $(2n)''$, ce qui est très rapide, et l'on a simplement :

$$(2n-1)''' \qquad k = -B_{2n-1},$$
$$(2n)''' \qquad k = A'_{2n}.$$

L'expression symbolique du coefficient B_{2n-1} est :

$$\begin{aligned} B_{2n-1} = {} & \Sigma_1^{2n-1} q_{2\alpha-1} + \Sigma_1^{2n-1} q_{2\alpha-1} q_{2\beta} q_{2\gamma-1} \\ & + \Sigma_1^{2n-1} q_{2\alpha-1} q_{2\beta} q_{2\gamma-1} q_{2\delta} q_{2\varepsilon-1} \\ + \ldots & + q_1 q_2 q_3 \cdots q_{2n-1}; \end{aligned}$$

dans les sommes les indices de q vont toujours en croissant; le premier Σ_1^{2n-1} représente la somme des quotients dont les indices sont impairs; la seconde représente la somme des produits de trois quotients dont les indices sont successivement un nombre impair, un nombre pair, un nombre impair; la troisième représente la somme des produits de cinq quotients dont les indices sont successivement un nombre impair, un nombre pair, etc.

L'expression symbolique du coefficient B est :

$$\begin{aligned} A_{2n} = {} & 1 + \Sigma_1^{2n} q_{2\alpha-1} q_{2\beta} + \Sigma_1^{2n} q_{2\alpha-1} q_{2\beta} q_{2\gamma-1} q_{2\delta} \\ & + \Sigma_1^{2n} q_{2\alpha-1} q_{2\beta} q_{2\gamma-1} q_{2\delta} q_{2\varepsilon-1} q_{2\zeta} \\ & + \ldots\ldots + q_1 q_2 \ldots\ldots q_{2n}; \end{aligned}$$

les indices de q vont en croissant; le premier Σ_1^{2n} représente la somme des produits de deux quotients dont les indices sont successivement un nombre impair, un nombre pair; le second représente la somme des produits de quatre quotients dont les indices sont successivement un nombre impair, un nombre pair, etc.; le troisième représente la somme des produits de six quotients dont les indices sont successivement un nombre impair; un nombre pair, etc.

6. Premier exemple. — Soit l'équation indéterminée :

$$1 = 89k - 137x.$$

Le tableau de la recherche du p. g. c. d. entre 137 et 89 est :

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
	1	1	1	5	1
137	89	48	41	7	6
48	41	7	6	1	

Comme $r = r_{2n-1} = r_5 = 1$, on a l'équation :

$$(E_5) \qquad 1 = 6y_5 + y_4,$$

dont on prend le couple de solutions $y_5 = 0, y_4 = 1$.

On doit calculer k avec la formule $(2n-1)'''$; en mettant seulement, pour abréger l'écriture, les indices des lettres q, on a :

$$B_5 = (1) + (3) + (5) + (1.2.3) + (1.2.5) + (1.4.5) + (3.4.5) + (1.2.3.4.5);$$

d'après le tableau, on trouve :

$$\begin{aligned} B_5 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 5 + 5 \\ &= 20 : \end{aligned}$$

donc $k = -20$. Et la moindre valeur positive de k est $137 - 20$ ou 117, à laquelle correspond $\rho_{117} = 1$.

A présent, pour avoir la valeur de k correspondante à $\rho_k = 83$, par exemple, il suffira d'écrire :

$$\begin{aligned} k &= \text{reste de } \frac{117.83}{137} \\ &= 121. \end{aligned}$$

7. Second exemple. — Soit l'équation indéterminée :

$$1 = 168k - 193x.$$

Le tableau de la recherche du p. g. c. d. entre 193 et 168 est :

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
	1	6	1	2	1	1
193	168	25	18	7	4	3
25	18	7	4	3	1	

Comme $r_{2n} = r_6 = 1$, on a l'équation :

$$(E_6) \qquad 1 = 3y_6 + y_5,$$

dont on prend le couple de solutions $y_6 = 0, y_5 = 1$.

On doit calculer k avec la formule $(2n)'''$; en mettant seulement, pour abréger l'écriture, les indices des lettres q, on a :

$$A'_6 = 1 + (1.2) + (1.4) + (1.6) + (3.4) + (3.6) + (5.6) + (1.2.3.4) + (1.2.3.6) + (1.2.5.6) + (1.4.5.6) + (3.4.5.6) + (1.2.3.4.5.6);$$

d'après le tableau, on trouve :

$$A'_6 = 1 + 6 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 12 + 6 + 6 + 2 + 2 + 12 = 54;$$

donc $k = 54$. C'est la moindre valeur positive de k, à laquelle correspond $\rho_{54} = 1$.

A présent, pour avoir la valeur de k correspondant à $\rho_k = 179$, par exemple, il suffit d'écrire :

$$k = \text{reste de } \frac{54.179}{193}$$

$$k = 16.$$

ADDITION AU MÉMOIRE INTITULÉ :

Recherche rapide des facteurs premiers des nombres à l'aide de deux Tables de restes (s. IX, t. IX, 1908).

A un même diviseur premier D et à une même valeur de la caractéristique K, il correspond deux restes ρ et ρ' dont la somme est D.

Supposons que, pour tous les diviseurs D et toutes les caractéristiques K, on ait inscrit l'un sous l'autre les restes ρ et ρ', à l'intersection de la colonne K et de la ligne D. On aurait ainsi une *Table des restes* ρ *et* ρ' permettant de ne construire la Table des restes R que pour les indicateurs inférieurs à $\frac{1}{2}$ B.

Soit N un nombre dont l'indicateur est supérieur à $\frac{1}{2}$ B. Désignons par I et par I′ deux indicateurs supplémentaires ; si $I < \frac{1}{2}$ B, $I' > \frac{1}{2}$ B. On a :

$$N = BK + I' = B(K + 1) - I.$$

On reconnaît que :

Un nombre BK + I′ *est divisible ou non par* D, *selon que le reste* R

obtenu en divisant I *par* D *est égal ou non au reste* ρ' *correspondant à* D *et à* K + 1.

Par suite, quand N a pour caractéristique K et pour indicateur $I > \frac{1}{2} B$, il faut comparer R à la valeur de ρ' qui est sous la caractéristique suivante K + 1.

Exemple. — Soit N = 19 909 871. On a :

$$N = B.38 \quad 510\,491$$
$$= B.39 - 19.$$

Or, à l'intersection de la ligne du diviseur 307 et de la colonne de la caractéristique 39, on voit le reste 19 dans la ligne ρ'. Donc N, de caractéristique 38, admet le diviseur 307.

Il est évident que la dernière caractéristique inscrite dans la Table des restes ρ et ρ' devra être 196.

PRÉSENTATION A LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

Par M. ERNEST LEBON

DE SON OUVRAGE INTITULÉ :

SAVANTS DU JOUR :

PAUL APPELL, BIOGRAPHIE, BIBLIOGRAPHIE DES ÉCRITS (1)

Séance du 26 *novembre* 1910

J'ai l'honneur de présenter à mes Collègues l'Opuscule consacré à M. PAUL APPELL, élu Membre de la Société Philomathique le 9 mars 1878, en les priant de me permettre de reproduire tout d'abord le paragraphe que M. CHARLIER a fait insérer au *Journal Officiel de la République Française* du 24 novembre 1910 (p. 9590), dans son compte rendu de la Séance du 14 novembre 1910 de l'Académie des Sciences.

En présentant à l'Académie la quatrième notice de la collection des *Savants du jour*, entreprise par le professeur Ernest Lebon, agrégé de l'Université, l'auteur bien connu de l'*Histoire de l'Astronomie* et de l'*Histoire des Sciences mathématiques*, le secrétaire perpétuel, M. Gaston Darboux, s'exprime en ces termes :

« Cette quatrième notice est encore consacrée à un géomètre, et j'ajoute à un de nos confrères les plus sympathiques, Paul Appell, doyen et professeur de mécanique à la Faculté des sciences de Paris.

« On y remarque le même soin, la même compétence, la même disposition et la même exactitude que dans les notices précédentes. J'y dois signaler tout particulièrement la biographie qui ouvre le volume et qui a été rédigée par M. E. Lebon. Elle contient les détails les plus touchants sur la vie et la famille de notre confrère, Alsacien d'origine et qui a toujours conservé au fond du cœur l'affection la plus ardente pour le pays où s'est écoulée sa jeunesse et où il prend tant de plaisir à retourner chaque année.

« Ce nouveau volume est une contribution précieuse à l'histoire des

(1) Un volume grand in-8° (28-18) de VIII-72 pages, papier de Hollande, avec un portrait en héliogravure. Paris, Gauthier-Villars, 10 novembre 1900.

sciences, et l'on doit désirer que M. E. Lebon continue avec la même ardeur et le même talent l'œuvre si utile et si française à laquelle il s'est consacré. »

En faisant précéder les sections d'analyse et de géométrie d'appréciations dues à des savants, M. Ernest Lebon a englobé dans son travail, qui est une véritable œuvre de bénédictin, des éléments qui font oublier la sécheresse inévitable de suite d'énumérations de titres d'écrits, bien que ces titres soient le plus souvent accompagnés de sobres explications et que l'auteur ait introduit dans son travail une analyse du *Traité de Mécanique rationnelle* de M. P. Appell.

En somme, M. Lebon est parvenu à composer un ouvrage qui est à la fois intéressant pour les personnes qui désirent connaître, seulement dans son ensemble, l'œuvre de M. Paul Appell, et très utile à celles qui se livrent à des études et des recherches dans le domaine si étendu de l'analyse, de la géométrie et de la mécanique.

En faisant remarquer que M. P. Appell a bien voulu faire lui-même le classement des Mémoires et Notes d'Analyse et qu'il a approuvé la dernière épreuve d'imprimerie de cet opuscule, je demande que l'on veuille bien me permettre de reproduire les premières lignes de la *Notice* que j'ai composée sur la *Vie et les Travaux* de M. Paul Appell.

M. *Paul-Emile* Appell naquit à Strasbourg, chef-lieu de l'ancien département du Bas-Rhin, le 27 septembre 1855. Son père, Jean-Pierre Appell, avait un atelier et un petit magasin de teinturerie place Saint-Étienne, au fond de la cour d'une maison appelée le *Ritterhus* en parler strasbourgeois, grande et ancienne construction surmontée de plusieurs étages de greniers auxquels on accède par un escalier de pierre tournant dans une tour: ce vieux bâtiment était rempli d'enfants qui se livraient à des jeux sans fin dans la cour ou dans les greniers. Le jeune Paul Appell fut mis au Collège Saint-Arbogast, dépendant de l'évêché, dirigé par un homme intelligent et bon, d'une haute conscience, d'un ardent patriotisme, l'abbé Uhrin. Les vacances se passaient au village natal de sa mère, Élisabeth Müller, le *Klingenthal*, situé dans une étroite et longue vallée des Vosges orientales, entre le mont Saint-Odile et le Heidenkopf, toute remplie de la fraîcheur des eaux descendant de la montagne, et des bruits d'une fabrique d'armes blanches ayant appartenu à l'État Français de Louis XV à Louis-Philippe. Sa famille était profondément attachée à la France et aux idées de justice et de liberté mises en action par la Révolution française. Son père, comme soldat français, dans une petite opération militaire en Corse, avait reçu au pied une blessure dont il souffrit toute sa vie. Son frère, Charles Appell, né d'un premier mariage, de treize ans plus âgé que lui, s'engagea à dix-sept ans dans l'armée française : il prit part à la guerre d'Italie et fut envoyé, après la campagne, en congé de convalescence. Quand le père mourut, en 1869, ce frère aîné devint le conseiller et l'éducateur du

jeune collégien, auquel il fit partager son amour passionné pour les longues courses dans les solitudes boisées des Vosges, pour les chasses patientes de la montagne et pour les chasses abondantes et faciles de la plaine d'Alsace. Il s'établit alors entre les deux frères une affection étroite, une tendresse virile chaque jour plus profonde. Pendant que le caractère de l'adolescent était ainsi développé vers l'action, l'influence d'une mère d'élite, réfléchie et laborieuse, douce mais obstinée, le poussait au travail régulier et persévérant.

Le collège Saint-Arbogast ayant été fermé en 1868, le jeune Paul Appell passa un an en troisième au petit séminaire de Strasbourg, et, pendant l'année scolaire 1869-1870, il suivit le cours de la classe de seconde du lycée. La guerre ayant été alors déclarée, il vit arriver la belle armée d'Afrique, puis les sombres jours, la défaite et l'investissement. Sa famille était restée à Strasbourg pendant le siège ; son frère, après avoir servi comme ambulancier volontaire sur le champ de bataille de Wœrth, rentra à Strasbourg et s'engagea immédiatement dans la Compagnie de francs-tireurs commandée par Liès-Bodard, professeur à la Faculté des Sciences. Paul Appell, âgé de quatorze ans, chercha à se rendre utile en aidant dans une cantine provisoire, installée brasserie Piton, à nourrir de pauvres gens sans travail et sans ressources. Après la capitulation, tous les établissements d'enseignement étant fermés en Alsace, il fut envoyé au Klingenthal. Son frère Charles, sorti de la ville en échappant aux Allemands, put rentrer en France par le Hohwald et les Hautes-Vosges, et reprit du service dans la légion d'Alsace-Lorraine ; en 1871, il fut chargé en Alsace, par le Gouvernement de la Défense Nationale, d'une périlleuse mission, interrompue par l'armistice. Vinrent alors les événements les plus tristes de tous : l'élection des derniers députés d'Alsace-Lorraine, leur protestation à l'Assemblée Nationale contre l'annexion, l'arrachement brutal des deux Provinces si attachées à la France. La famille Appell dut se séparer : la mère et le frère Charles restèrent en Alsace et devinrent officiellement allemands ; le jeune Paul prit un permis d'émigration et alla opter à Nancy pour la nationalité française. Dans ces séparations douloureuses qui déchirèrent alors toutes les familles alsaciennes et lorraines, on ne saurait dire quels sont ceux qui firent le sacrifice le plus grand et le plus utile, ceux qui partirent, ou ceux qui restèrent...

De l'année 1876 à l'année 1892, M. P. Appell a publié un grand nombre de Mémoires et de Notes en Analyse pure, en Géométrie infinitésimale, en Géométrie analytique et en Mécanique rationnelle. J'ai donné dans la *Notice* une analyse succincte des principaux de ces écrits, et dans le corps du Livre des éclaircissements sur la plupart des autres. Plusieurs récompenses furent décernées à M. P. Appell au sujet de ses travaux mathématiques, notamment, le 21 janvier 1889, une médaille d'or dans le Concours international, institué par le roi de Suède et de Norvège, Oscar II, à l'occasion du 60e anniversaire de sa naissance ; et, le 21 décembre 1885, le Prix Bordin pour son

Mémoire sur les Déblais et les Remblais. Toutes les remarquables recherches de M. P. Appell le firent élire, le 7 novembre 1892, membre de l'Académie des Sciences, dans la Section de Géométrie. Pendant les années qui suivirent cette élection, il continua ses recherches en Analyse pure et en Analyse appliquée à la Mécanique. Les découvertes de M. P. Appell dans cette dernière branche des Mathématiques ont trouvé leur place dans son *Traité de Mécanique rationnelle*, dont la publication a été commencée en 1893 : les diverses éditions des trois volumes de cet Ouvrage, qui est très apprécié, sont analysées au début de la IVe Section de cet Opuscule.

Le 1er avril 1903, M. P. Appell fut élu Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris et, en 1904, membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique ; de plus, il fait partie de la section permanente de ce Conseil. Ces fonctions absorbantes l'ont contraint à consacrer la plus grande partie de son activité à l'étude des questions relatives à l'organisation de l'Enseignement supérieur en France. Ses idées sur l'éducation et les études sont exposées dans plusieurs Discours et Articles.

Je demande une nouvelle autorisation, celle de terminer cette Présentation en lisant les dernières lignes de la *Notice*.

La vie de M. Paul Appell a toujours été d'une extrême simplicité, en rapport avec les traditions alsaciennes ; on peut dire qu'elle a été partagée entre deux sentiments : l'amour du travail et de l'action scientifique, le désir passionné de voir de nouveau réunies sa grande et sa petite patrie, la France et l'Alsace. Tous les ans, pendant les grandes vacances, il va se reposer et songer dans le pittoresque pays alsacien où son enfance s'est écoulée heureuse, dans les forêts des Vosges dont il a pénétré le charme grave et profond, en chassant avec son malheureux frère, et qu'il aime maintenant à parcourir en promeneur et à faire connaître à ses amis de France.

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES DU TOME II

Pages.

Appell (P.). — Biographie, bibliographie des écrits. — E. Lebon..... 178
Banquet annuel..... 68
Biographie de P. Appell. — E. Lebon..... 178
— G. Darboux — 59
— E. Picard — 136
Caractéristiques d'une table de facteurs premiers. — E. Lebon..... 171
Comptes rendus des séances..... 65, 141
Cellules nerveuses spinales. — R. Legendre..... 54
Crevettes à mâles dimorphes. — H. Coutière..... 71
Darboux (G.). — Biographie, bibliographie des écrits. — E. Lebon..... 59
Décomposition des grands nombres en facteurs premiers. — E. Lebon.... 45
Définition et mesure des températures. — J. Deschamps..... 144
Dissociation de la molécule d'iode. — C. Matignon..... 88
Facteurs premiers des grands nombres. — E. Lebon..... 45, 171
Géométrie analytique (Notes). — G. Deschamps..... 9
Grands nombres (facteurs premiers). — E. Lebon..... 45, 171
Golgi (réseau interne de). — R. Legendre..... 54
Intensités calorifiques. — J. Deschamps..... 144
Iode (dissociation de la molécule). — C. Matignon..... 88
Liste des membres de la société..... 2
Lois (décomposition des nombres en facteurs premiers). — E. Lebon..... 45
Mâles dimorphes des crevettes du genre *Saron*. — H. Coutière..... 71
Notes de géométrie analytique. — J. Deschamps..... 9
Oiseaux sédentaires du Pungoué et du bas Zambèze. — A. Ménégaux..... 93
E. Picard, biographie, bibliographie des écrits. — E. Lebon..... 136
Pungoué (oiseaux). — A. Ménégaux..... 93
Réseau interne de Golgi. — R. Legendre..... 54
Saron (mâles dimorphes). — H. Coutière..... 71
Sédentaires (oiseaux) du bas Zambèze. — A. Ménégaux..... 93
Table des facteurs premiers des grands nombres. — E. Lebon..... 171
Températures (mesure et définition). — J. Deschamps..... 144
Théorèmes et lois (facteurs premiers des grands nombres). — E. Lebon... 45
Zambèze (Bas), Oiseaux sédentaires. — A. Ménégaux..... 93

TABLE DES AUTEURS

Pages.

H. Coutière. — Les crevettes à mâles dimorphes du genre *Saron*..... 71

J. Deschamps. — Notes de géométrie analytique..... 9

— Définition et mesure des températures par les intensités calorifiques..... 144

E. Lebon. — Théorèmes et lois pour la décomposition des grands nombres en facteurs premiers..... 45

— G. Darboux, biographie, bibliographie analytique des écrits. 59

— E. Picard, — — 136

— P. Appell, — — 178

— Calcul des caractéristiques d'une table des facteurs premiers des grands nombres..... 171

R. Legendre. — Le réseau interne de Golgi des cellules nerveuses spinales..... 54

C. Matignon. — Sur la dissociation de la molécule d'iode..... 88

A. Ménégaux. — Sur les oiseaux sédentaires du Pungoué et du bas Zambèze..... 93

Tours, imprimerie Deslis Frères, 6, rue Gambetta.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

DIXIÈME SÉRIE — TOME I

N° 1

1909

PARIS

AU SIEGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

1909

Le Secrétaire-Gérant,
H. COUTIÈRE

Le Bulletin paraît par livraisons bimestrielles.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1909

Président : M. PERRIN, 61, rue de Vaugirard.

Vice-président : M. MATIGNON, 17, boulevard Carnot, Bourg-la-Reine.

Trésorier : M. RABAUD, 3, rue Vauquelin.

Secrétaire des séances : M. WINTER, 44, rue Saint-Placide.

Vice-secrétaire des séances : M. LEBON, 4 *bis*, rue des Écoles.

Secrétaire du bulletin : M. COUTIÈRE, 12, rue Notre-Dame-des-Champs.

Vice-secrétaire du bulletin : M. NEUVILLE, 55, rue de Buffon.

Archiviste : M. HENNEGUY, 9, rue Thénard.

La Société Philomatique de Paris se réunit les 2e et 4e Samedis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Etudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le Bulletin.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. VÉZINAUD, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, Ve.

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE I

Pages

Leau (L.). — Sur un problème combinatoire..... 3

— Surfaces applicables et Courbure géodésique..... 6

Deschamps (Dr J.). — Complexe de dispersion..... 12

Gravier (Ch.). — Récentes recherches océanographiques en Norvège..... 32

Pellegrin (J.). — Sur une seconde collection de poissons recueillie par M. E. Haug, à Ngomo (Ogôoué)..... 45

LE PRIX DES TIRÉS A PART EST FIXÉ AINSI QU'IL SUIT :

	25 ex.	50 ex.	75 ex.	100 ex.	150 ex.	200 ex.	250 ex.
	—	—	—	—	—	—	—
Une feuille	4.50	5.85	7.20	8.10	10.60	12.85	14.85
Trois quarts de feuille.	4 »	5 »	6.10	7 »	9 »	10.60	12.15
Une demi-feuille . .	3.15	4 »	5 »	5.60	7.20	8.10	9 »
Un quart de feuille .	2.70	3.60	4.25	4.75	5.60	6.30	8.85
Un huitième de feuille.	2 »	2.70	3.15	3.60	4.05	4.50	5 »
Plusieurs feuilles . .	4 »	5.40	6.30	7.20	9 »	11.70	14 »

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

1re série : 1789-1805.	3 volumes in-4°
2e série : 1807-1813.	3 volumes in-4°
3e série : 1814-1826.	13 fascicules in-4°
4e série : 1832-1833.	2 volumes in-4°
5e série : 1836-1863.	28 fascicules in-4°
6e série : 1864-1876.	13 fascicules in-8°
7e série : 1877-1888.	11 volumes in-8°
Chaque année pour les Membres de la Société.	5 francs
— pour le public.	12 francs

Mémoires originaux publiés par la Société Philomathique

A L'OCCASION DU

CENTENAIRE DE SA FONDATION

1788-1888

Le recueil des mémoires originaux publié par la Société philomathique à l'occasion du centenaire de sa fondation (1788-1888) forme un volume in-4° de 437 pages, accompagné de nombreuses figures dans le texte et de 24 planches. Les travaux qu'il contient sont dus, *pour les sciences physiques et mathématiques*, à : MM. Désiré André ; E. Becquerel, de l'Institut ; Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Institut ; Bouty ; Bourgeois ; Descloizeaux, de l'Institut ; Fouret ; Gernez ; Hardy ; Haton de la Goupillère, de l'Institut ; Laisant ; Laussedat ; Léauté, de l'Institut ; Mannheim ; Moutier ; Peligot, de l'Institut ; Pellat. *Pour les sciences naturelles*, à : MM. Alix ; Bureau ; Bouvier, de l'Institut ; Chatin, de l'Institut ; Drake de Castillo ; Duchartre, de l'Institut ; H. Filhol, de l'Institut ; Franchet ; Grandidier, de l'Institut ; Henneguy ; Milne Edwards, de l'Institut ; Mocquard ; Poirier ; A. de Quatrefages, de l'Insti-tut ; G. Roze ; L. Vaillant.

En vente au prix de 35 francs

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ, A LA SORBONNE

Paris. — Imprimerie A. MAYEUR, 4, rue de la Verrerie.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

SÉRIE X. — TOME I

N° 2

1909

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

—

1909

Le Secrétaire-Gérant,
H. COUTIÈRE.

Le Bulletin paraît par livraisons bimestrielles.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1909

Président : M. R. Perrin, 61, rue de Vaugirard.
Vice-Président : M. C. Matignon, 17, boulevard Carnot, Bourg-la-Reine.
Trésorier : M. Rabaud, 3, rue Vauquelin.
Secrétaire des séances : M. Winter, 44, rue Saint-Placide.
Vice-Secrétaire des séances : M. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.
Secrétaire du Bulletin : M. Coutière, 12, rue Notre-Dame-des-Champs.
Vice-Secrétaire du Bulletin : M. Neuville, 55, rue de Buffon.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

La Société Philomathique de Paris se réunit les 2e et 4e Samedis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Étudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le *Bulletin*.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. Vézinaud, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, Ve.

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE II

Pages.

Liste des membres de la Société 57
Extrait des comptes rendus des séances 63
Banquet annuel 66
Rapport de la Commission des comptes 68
S. Laisant. — Propriétés des progressions par différence 70
P. Mahler. — Un savant du XVIIIe siècle, le duc de Chaulnes 72
C. Matignon. — Équilibres entre phases liquide et solides dans le mélange NaCl + H^2O. — Fusion de la neige 76
M. Marage. — Utilité de la méthode graphique dans l'étude des instruments de musique anciens 80
M. Marage. — Les voyelles laryngiennes 84

LE PRIX DES TIRÉS A PART EST FIXÉ AINSI QU'IL SUIT :

	25 ex.	50 ex.	75 ex.	100 ex.	150 ex.	200 ex.	250 ex.
Une feuille	4.50	5.85	7.20	8.10	10.60	12.85	14.85
Trois quarts de feuille..	4 »	5 »	6.10	7 »	9 »	10.60	12.15
Une demi-feuille	3.15	4 »	5 »	5.60	7.20	8.10	9 »
Un quart de feuille ...	2.70	3.60	4.25	4.75	5.60	6.30	8.85
Un huitième de feuille.	2 »	2.70	3.15	3.60	4.05	4.50	5 »
Plusieurs feuilles	4 »	5.40	6.30	7.20	9 »	11.70	14 »

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

1re série : 1789-1805	3 volumes in-4°
2e série : 1807-1813	3 volumes in-4°
3e série : 1814-1826	13 fascicules in-4°
4e série : 1832-1833	2 volumes in-4°
5e série : 1836-1863	28 fascicules in-4°
6e série : 1864-1876	13 fascicules in-8°
7e série : 1877-1888	11 volumes in-8°
Chaque année pour les Membres de la Société	5 francs
— pour le public	12 —

Mémoires originaux publiés par la Société Philomathique

A L'OCCASION DU

CENTENAIRE DE SA FONDATION

1788-1888

Le recueil des mémoires originaux publié par la Société philomathique à l'occasion du centenaire de sa fondation (1788-1888) forme un volume in-4° de 437 pages, accompagné de nombreuses figures dans le texte et de 24 planches. Les travaux qu'il contient sont dus, *pour les sciences physiques et mathématiques*, à MM. Désiré André; E. Becquerel, de l'Institut; Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Institut; Bouty, de l'Institut; Bourgeois; Descloizeaux, de l'Institut; Fouret; Gernez; Hardy; Haton de La Goupillère, de l'Institut; Laisant; Laussedat; Léauté, de l'Institut; Mannheim; Moutier; Peligot, de l'Institut; Pellat; — *pour les sciences naturelles*, à : MM. Alix; Bureau; Bouvier, de l'Institut; Chatin, de l'Institut; Drake de Castillo; Duchartre, de l'Institut; H. Filhol, de l'Institut; Franchet; Grandidier, de l'Institut; Henneguy, de l'Institut; Milne-Edwards, de l'Institut; Mocquard; Poirier; A. de Quatrefages, de l'Institut; G. Roze; L. Vaillant.

En vente au prix de 35 francs

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ A LA SORBONNE

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES, 6, RUE GAMBETTA.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

SÉRIE X. — TOME I

N° 3

1909

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

—

1909

Le Secrétaire-Gérant,
H. COUTIÈRE.

Le Bulletin paraît par livraisons bimestrielles.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1909

Président : M. R. Perrin, 61, rue de Vaugirard.
Vice-Président : M. C. Matignon, 17, b^d Carnot, Bourg-la-Reine.
Trésorier : M. Rabaud, 3, rue Vauquelin.
Secrétaire des séances : M. Winter, 44, rue Saint-Placide.
Vice-Secrétaire des séances : M. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.
Secrétaire du Bulletin : M. Coutière, 12, rue N.-D.-des-Champs.
Vice-Secrétaire du Bulletin : M. Neuville, 55, rue de Buffon.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

La Société Philomathique de Paris se réunit les 2e et 4e Samedis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Étudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le *Bulletin*.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. Vézinaud, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, V^e^.

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE III

Pages.

Avis..... 85

Extraits des comptes rendus des séances..... 86

C. Matignon. — Statique des réactions dans lesquelles interviennent un gaz et des solides..... 88

Ménégaux. — Sur le peu d'importance systématique du caractère tiré de la présence ou de l'absence du foramen sus-épicondylien..... 93

Paul Lemoine. — Contributions à la connaissance géologique des colonies françaises..... 101

Paul Lemoine. — Observations faites sur le tremblement de terre de Provence..... 112

Ernest Lebon. — Henri Poincaré, biographie, bibliographie analytique des écrits..... 146

LE PRIX DES TIRÉS A PART EST FIXÉ AINSI QU'IL SUIT :

	25 ex.	50 ex.	75 ex.	100 ex.	150 ex.	200 ex.	250 ex.
Une feuille.....	4.50	5.85	7.20	8.10	10.60	12.85	14.85
Trois quarts de feuille..	4 »	5 »	6.10	7 »	9 »	10.60	12.15
Une demi-feuille.....	3.15	4 »	5 »	5.60	7.20	8.10	9 »
Un quart de feuille ...	2.70	3.60	4.25	4.75	5.60	6.30	8.85
Un huitième de feuille.	2 »	2.70	3.15	3.60	4.05	4.50	5 »
Plusieurs feuilles.....	4 »	5.40	6.30	7.20	9 »	11.70	14 »

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

1re série : 1789-1805	3 volumes in-4°
2e série : 1807-1813	3 volumes in-4°
3e série : 1814-1826	13 fascicules in-4°
4e série : 1832-1833	2 volumes in-4°
5e série : 1836-1863	28 fascicules in-4°
6e série : 1864-1876	13 fascicules in-8°
7e série : 1877-1888	11 volumes in-8°

Chaque année pour les Membres de la Société ..... 5 francs
— pour le public ..... 12 —

Mémoires originaux publiés par la Société Philomathique

A L'OCCASION DU

CENTENAIRE DE SA FONDATION

1788-1888

Le recueil des mémoires originaux publié par la Société philomathique à l'occasion du centenaire de sa fondation (1788-1888) forme un volume in-4° de 437 pages, accompagné de nombreuses figures dans le texte et de 24 planches. Les travaux qu'il contient sont dus, *pour les sciences physiques et mathématiques*, à MM. Désiré André; E. Becquerel, de l'Institut; Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Institut; Bouty, de l'Institut; Bourgeois; Descloizeaux, de l'Institut; Fouret; Gernez; Hardy; Haton de La Goupillère, de l'Institut; Laisant; Laussedat; Léauté, de l'Institut; Mannheim; Moutier; Peligot, de l'Institut; Pellat; — *pour les sciences naturelles*, à : MM. Alix; Bureau; Bouvier, de l'Institut; Chatin, de l'Institut; Drake del Castillo; Duchartre, de l'Institut; H. Filhol, de l'Institut; Franchet; Grandidier, de l'Institut; Henneguy, de l'Institut; Milne-Edwards, de l'Institut; Mocquard; Poirier; A. de Quatrefages, de l'Institut; G. Roze; L. Vaillant.

En vente au prix de 35 francs

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ A LA SORBONNE

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES, 6, RUE GAMBETTA.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

SÉRIE X. — TOME I

N° 4-5-6

1909

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

—

1909

Le Secrétaire-Gérant,
H. COUTIÈRE.

Le Bulletin paraît par livraisons bimestrielles.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1909

Président : M. R. Perrin, 61, rue de Vaugirard.
Vice-Président : M. C. Matignon, 17, b^d Carnot, Bourg-la-Reine.
Trésorier : M. Rabaud, 3, rue Vauquelin.
Secrétaire des séances : M. Winter, 44, rue Saint-Placide.
Vice-Secrétaire des séances : M. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.
Secrétaire du Bulletin : M. Coutière, 118, Avenue d'Orléans.
Vice-Secrétaire du Bulletin : M. Neuville, 55, rue de Buffon.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

La Société Philomathique de Paris se réunit les 2e et 4e Samedis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Étudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le *Bulletin*.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. Vézinaud, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, V^e^.

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE IV-V-VI

Pages.

Extraits des comptes rendus des séances..... 149

Deschamps (G.). — Notes de géométrie analytique. — Démonstration de quelques identités fondamentales et premières applications..... 152

Legendre (P.).— Variations de température, de densité et de teneur en oxygène de l'eau de mer littorale à Concarneau et à Arcachon..... 194

Pellegrin (J.). — Les Poissons du genre *Vandellia* C. V..... 197

Menegaux (A.). — Etude d'une collection d'Oiseaux provenant des hauts plateaux de la Bolivie et du Pérou méridional..... 205

LE PRIX DES TIRÉS A PART EST FIXÉ AINSI QU'IL SUIT :

	25 ex.	50 ex.	75 ex.	100 ex.	150 ex.	200 ex.	250 ex.
Une feuille.....	4.50	5.85	7.20	8.10	10.60	12.85	14.85
Trois quarts de feuille..	4 »	5 »	6.10	7 »	9 »	10.60	12.15
Une demi-feuille.....	3.15	4 »	5 »	5.60	7.20	8.10	9 »
Un quart de feuille...	2.70	3.60	4.25	4.75	5.60	6.30	8.85
Un huitième de feuille.	2 »	2.70	3.15	3.60	4.05	4.50	5 »
Plusieurs feuilles.....	4 »	5.40	6.30	7.20	9 »	11.70	14 »

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

1re série : 1789-1805	3	volumes in-4°
2e série : 1807-1813	3	volumes in-4°
3e série : 1814-1826	13	fascicules in-4°
4e série : 1832-1833	2	volumes in-4°
5e série : 1836-1863	28	fascicules in-4°
6e série : 1864-1876	13	fascicules in-8°
7e série : 1877-1888	11	volumes in-8°
Chaque année pour les Membres de la Société	5	francs
— pour le public	12	—

Mémoires originaux publiés par la Société Philomathique

A L'OCCASION DU

CENTENAIRE DE SA FONDATION

1788-1888

Le recueil des mémoires originaux publié par la Société philomathique à l'occasion du centenaire de sa fondation (1788-1888) forme un volume in-4° de 437 pages, accompagné de nombreuses figures dans le texte et de 24 planches. Les travaux qu'il contient sont dus, *pour les sciences physiques et mathématiques*, à MM. Désiré André; E. Becquerel, de l'Institut; Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Institut; Bouty, de l'Institut; Bourgeois; Descloizeaux, de l'Institut; Fouret; Gernez; Hardy; Haton de La Goupillère, de l'Institut; Laisant; Laussedat; Léauté, de l'Institut; Mannheim; Moutier; Peligot, de l'Institut; Pellat; — *pour les sciences naturelles*, à : MM. Alix; Bureau; Bouvier, de l'Institut; Chatin, de l'Institut; Drake del Castillo; Duchartre, de l'Institut; H. Filhol, de l'Institut; Franchet; Grandidier, de l'Institut; Henneguy, de l'Institut; Milne-Edwards, de l'Institut; Mocquard; Poirier; A. de Quatrefages, de l'Institut; G. Roze; L. Vaillant.

En vente au prix de 35 francs

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ A LA SORBONNE

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES, 6, RUE GAMBETTA.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

SÉRIE X. — TOME II

N° 1

1910

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

—

1910

Le Secrétaire-Gérant,
H. COUTIÈRE.

Le Bulletin paraît par livraisons bimestrielles.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1910

Président : M. R. Perrin, 61, rue de Vaugirard.
Vice-Président : M. C. Matignon, 17, B^d^ Carnot, Bourg-la-Reine.
Trésorier : M. Rabaud, 3, rue Vauquelin.
Secrétaire des séances : M. Winter, 44, rue Saint-Placide.
Vice-Secrétaire des séances : M. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.
Secrétaire du Bulletin : M. Coutière, 118, avenue d'Orléans.
Vice-Secrétaire du Bulletin : M. Neuville, 55, rue de Buffon.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

La Société Philomathique de Paris se réunit les 2e et 4e Samedis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Étudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le *Bulletin*.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. Vézinaud, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, V^e^.

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE I

Pages.

Liste des membres de la Société..... 3
Joseph Deschamps. — Notes de géométrie analytique..... 9
Ernest Lebon. — Théorèmes et lois pour la décomposition de grands nombres en deux facteurs..... 45
R. Legendre. — Le réseau interne de Golgi des cellules nerveuses spinales. 54
E. Lebon. — G. Darboux, biographie, bibliographie analytique des écrits... 59

LE PRIX DES TIRÉS A PART EST FIXÉ AINSI QU'IL SUIT :

	25 ex.	50 ex.	75 ex.	100 ex.	150 ex.	200 ex.	250 ex.
Une feuille.....	4.50	5.85	7.20	8.10	10.60	12.85	14.85
Trois quarts de feuille..	4 »	5 »	6.10	7 »	9 »	10.60	12.15
Une demi-feuille.....	3.15	4 »	5 »	5.60	7.20	8.10	9 »
Un quart de feuille ...	2.70	3.60	4.25	4.75	5.60	6.30	8.85
Un huitième de feuille.	2 »	2.70	3.15	3.60	4.05	4.50	5 »
Plusieurs feuilles.....	4 »	5.40	6.30	7.20	9 »	11.70	14 »

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

1re série : 1789-1805	3 volumes in-4°
2e série : 1807-1813	3 volumes in-4°
3e série : 1814-1826	13 fascicules in-4°
4e série : 1832-1833	2 volumes in-4°
5e série : 1836-1863	28 fascicules in-4°
6e série : 1864-1876	13 fascicules in-8°
7e série : 1877-1888	11 volumes in-8°
Chaque année pour les Membres de la Société	5 francs
— pour le public	12 —

Mémoires originaux publiés par la Société Philomathique

A L'OCCASION DU

CENTENAIRE DE SA FONDATION

1788-1888

Le recueil des mémoires originaux publié par la Société philomathique à l'occasion du centenaire de sa fondation (1788-1888) forme un volume in-4° de 437 pages, accompagné de nombreuses figures dans le texte et de 24 planches. Les travaux qu'il contient sont dus, *pour les sciences physiques et mathématiques*, à MM. Désiré André; E. Becquerel, de l'Institut; Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Institut; Bouty, de l'Institut; Bourgeois; Descloizeaux, de l'Institut; Fouret; Gernez; Hardy; Haton de La Goupillère, de l'Institut; Laisant; Laussedat; Léauté, de l'Institut; Mannheim; Moutier; Peligot, de l'Institut; Pellat; — *pour les sciences naturelles*, à : MM. Alix; Bureau; Bouvier, de l'Institut; Chatin, de l'Institut; Drake del Castillo; Duchartre, de l'Institut; H. Filhol, de l'Institut; Franchet; Grandidier, de l'Institut; Henneguy, de l'Institut; Milne-Edwards, de l'Institut; Mocquard; Poirier; A. de Quatrefages, de l'Institut; G. Roze; L. Vaillant.

En vente au prix de 35 francs

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ A LA SORBONNE

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES, 6, RUE GAMBETTA.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

SÉRIE X. — TOME II

N° 2-3

1910

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

—

1910

Le Secrétaire-Gérant,
H. COUTIÈRE.

Le Bulletin paraît par livraisons bimestrielles.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1910

Président : M. C. Matignon, 17, B[d] Carnot, Bourg-la-Reine.
Vice-Président : M. Hua, 254, boulevard Saint-Germain.
Trésorier : M. Rabaud, 3, rue Vauquelin.
Secrétaire des séances : M. Winter, 44, rue Saint-Placide.
Vice-Secrétaire des séances : M. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.
Secrétaire du Bulletin : M. Coutière, 118, avenue d'Orléans.
Vice-Secrétaire du Bulletin : M. Neuville, 55, rue de Buffon.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

La Société Philomathique de Paris se réunit les 2e et 4e Samedis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Étudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le *Bulletin*.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. Vézinaud, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, V[e].

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE II-III

Pages

Extraits des comptes rendus des séances 65
Banquet annuel..... 68
H. Coutière. — Les crevettes à mâles dimorphes du genre *Saron* 71
Camille Matignon. — Sur la dissociation de la molécule d'iode..... 88
A. Menegaux. — Sur les oiseaux sédentaires dans les bassins du Pungoué et du bas Zambèze 93
Ernest Lebon. — Présentation à la Société Philomathique de Paris..... 136

LE PRIX DES TIRÉS A PART EST FIXÉ AINSI QU'IL SUIT :

	25 ex.	50 ex.	75 ex.	100 ex.	150 ex.	200 ex.	250 ex.
Une feuille.....	4.50	5.85	7.20	8.10	10.60	12.85	14.85
Trois quarts de feuille..	4 »	5 »	6.10	7 »	9 »	10.60	12.15
Une demi-feuille.....	3.15	4 »	5 »	5.60	7.20	8.10	9 »
Un quart de feuille ...	2.70	3.60	4.25	4.75	5.60	6.30	8.85
Un huitième de feuille.	2 »	2.70	3.15	3.60	4.05	4.50	5 »
Plusieurs feuilles....	4 »	5.40	6.30	7.20	9 »	11.70	14 »

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

1re série : 1789-1805	3 volumes in-4°	
2e série : 1807-1813	3 volumes in-4°	
3e série : 1814-1826	13 fascicules in-4°	
4e série : 1832-1833	2 volumes in-4°	
5e série : 1836-1863	28 fascicules in-4°	
6e série : 1864-1876	13 fascicules in-8°	
7e série : 1877-1888	11 volumes in-8°	
Chaque année pour les Membres de la Société		5 francs
— pour le public		12 —

Mémoires originaux publiés par la Société Philomathique

A L'OCCASION DU

CENTENAIRE DE SA FONDATION

1788-1888

Le recueil des mémoires originaux publié par la Société philomathique à l'occasion du centenaire de sa fondation (1788-1888) forme un volume in-4° de 437 pages, accompagné de nombreuses figures dans le texte et de 24 planches. Les travaux qu'il contient sont dus, *pour les sciences physiques et mathématiques*, à : MM. Désiré André; E. Becquerel, de l'Institut; Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Institut; Bouty, de l'Institut; Bourgeois; Descloizeaux, de l'Institut; Fouret; Gernez; Hardy; Haton de La Goupillère, de l'Institut; Laisant; Laussedat; Léauté, de l'Institut; Mannheim; Moutier; Peligot, de l'Institut; Pellat; — *pour les sciences naturelles*, à : MM. Alix; Bureau; Bouvier, de l'Institut; Chatin, de l'Institut; Drake del Castillo; Duchartre, de l'Institut; H. Filhol, de l'Institut; Franchet; Grandidier, de l'Institut; Henneguy, de l'Institut; Milne-Edwards, de l'Institut; Mocquard; Poirier; A. de Quatrefages, de l'Institut; G. Roze; L. Vaillant.

En vente au prix de 35 francs

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ, A LA SORBONNE

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES, 6, RUE GAMBETTA.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

SÉRIE X. — TOME II

N° 4-5-6

1910

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

—

1910

Le Secrétaire-Gérant,

H. COUTIÈRE.

Le Bulletin paraît par livraisons bimestrielles.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1910

Président : M. C. Matignon, 17, B^d^ Carnot, Bourg-la-Reine.
Vice-Président : M. Hua, 254, boulevard Saint-Germain.
Trésorier : M. Rabaud, 3, rue Vauquelin.
Secrétaire des séances : M. Winter, 44, rue Saint-Placide.
Vice-Secrétaire des séances : M. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.
Secrétaire du Bulletin : M. Coutière, 118, avenue d'Orléans.
Vice-Secrétaire du Bulletin : M. Neuville, 55, rue de Buffon.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

La Société Philomathique de Paris se réunit les 2e et 4e Samedis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Étudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le *Bulletin*.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. Vézinaud, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, V^e^.

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE IV-V-VI

Pages.

Extraits des comptes rendus des séances..... 141

J. Deschamps. — Définition et mesure des températures par les intensités calorifiques..... 144

E. Lebon. — Calcul avec une équation indéterminée des caractéristiques d'une table de facteurs premiers..... 171

— P. Appell, biographie, bibliographie des écrits..... 178

LE PRIX DES TIRÉS A PART EST FIXÉ AINSI QU'IL SUIT :

	25 ex.	50 ex.	75 ex.	100 ex.	150 ex.	200 ex.	250 ex.
Une feuille.....	4.50	5.85	7.20	8.10	10.60	12.85	14.85
Trois quarts de feuille..	4 »	5 »	6.10	7 »	9 »	10.60	12.15
Une demi-feuille.....	3.15	4 »	5 »	5.60	7.20	8.10	9 »
Un quart de feuille...	2.70	3.60	4.25	4.75	5.60	6.30	8.85
Un huitième de feuille.	2 »	2.70	3.15	3.60	4.05	4.50	5 »
Plusieurs feuilles.....	4 »	5.40	6.30	7.20	9 »	11.70	14 »

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

1re série : 1789-1805	3 volumes in-4°
2e série : 1807-1813	3 volumes in-4°
3e série : 1814-1826	13 fascicules in-4°
4e série : 1832-1833	2 volumes in-4°
5e série : 1836-1863	28 fascicules in-4°
6e série : 1864-1876	13 fascicules in-8°
7e série : 1877-1888	11 volumes in-8°

Chaque année pour les Membres de la Société..... 5 francs
— pour le public..... 12 —

Mémoires originaux publiés par la Société Philomathique

A L'OCCASION DU

CENTENAIRE DE SA FONDATION

1788-1888

Le recueil des mémoires originaux publié par la Société Philomathique à l'occasion du centenaire de sa fondation (1788-1888) forme un volume in-4° de 437 pages, accompagné de nombreuses figures dans le texte et de 24 planches. Les travaux qu'il contient sont dus, *pour les sciences physiques et mathématiques*, à : MM. Désiré André; E. Becquerel, de l'Institut; Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Institut; Bouty, de l'Institut; Bourgeois; Descloizeaux, de l'Institut; Fouret; Gernez; Hardy; Haton de La Goupillère, de l'Institut; Laisant; Laussedat; Léauté, de l'Institut; Mannheim; Moutier; Peligot, de l'Institut; Pellat; — *pour les sciences naturelles*, à : MM. Alix; Bureau; Bouvier, de l'Institut; Chatin, de l'Institut; Drake del Castillo; Duchartre, de l'Institut; H. Filhol, de l'Institut; Franchet; Grandidier, de l'Institut; Henneguy, de l'Institut; Milne-Edwards, de l'Institut; Mocquard; Poirier; A. de Quatrefages, de l'Institut; G. Roze; L. Vaillant.

En vente au prix de 35 francs

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ, A LA SORBONNE

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES, 6, RUE GAMBETTA.

Bull. de la
10 ser
JUL 16 192
JUL 17 1925
Jan 14, 1931
MAR 22 19
APR 17 19
AUG 9 1968
5 29 4

AMNH LIBRARY
100125074